Definiční obor

↳ množina bodů, pro které je funkce definována

$f(x) = \underline{\qquad}$, $D_f = \{x$, pro které má výraz $f(x)$ smysl, „nepoužijeme základní pravidla“ $\}$

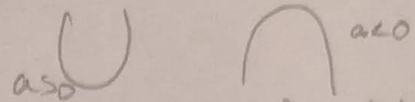
Přehled funkcí — definiční obory a grafy

1) lineární funkce $f(x) = ax + b$

$D_f = \mathbb{R}$

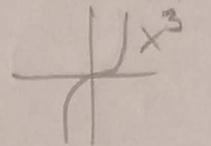
2) kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$

$D_f = \mathbb{R}$



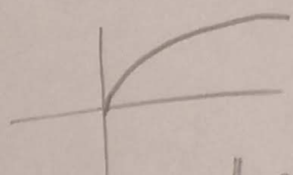
3) polynom $f(x) =$ „kombinace $1, x, x^2, \dots, x^\alpha$ + násobení konstantou"

$D_f = \mathbb{R}$



4) odmocnina $f(x) = \sqrt{x}$ „odmocňujeme pouze nezáporná čísla"

$D_f = \langle 0; +\infty)$



„$\sqrt{\cdot} \geq 0$ odmocnina je vždy nezáporná"

5) lin. lomená funkce $f(x) = \dfrac{\text{„lineární funkce"}}{\text{lineární funkce}}$

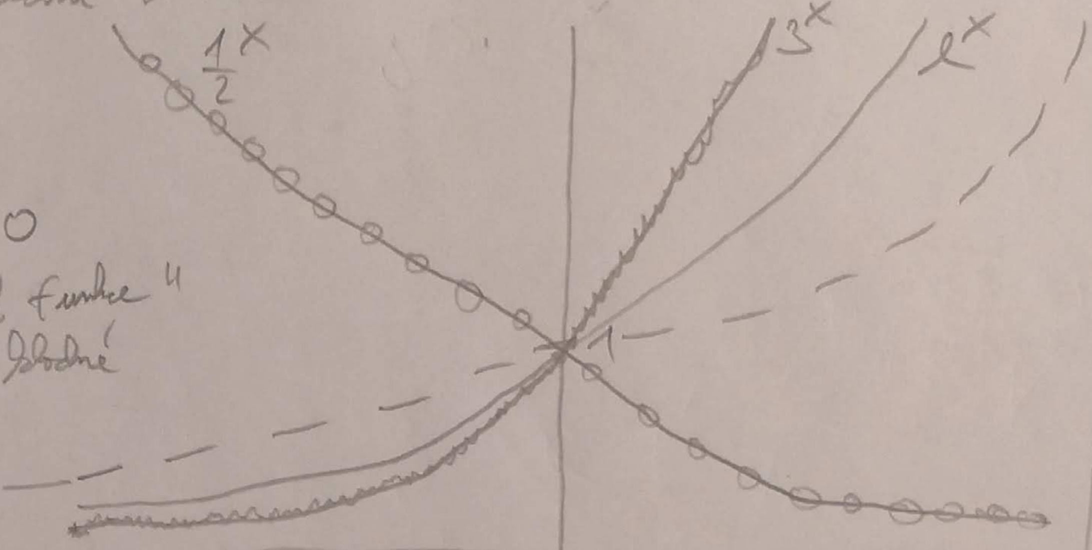
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{$bod x, ve kterém je jmenovatel rovný nule$\}$

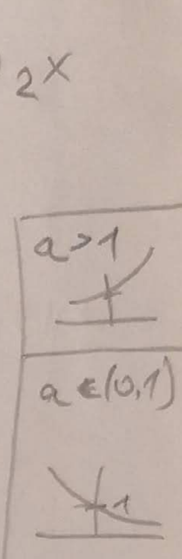
„nesmíme dělit nulou"

6) exponenciální funkce $f(x) = e^x$, $e \approx 2.7$

$D_f = \mathbb{R}$

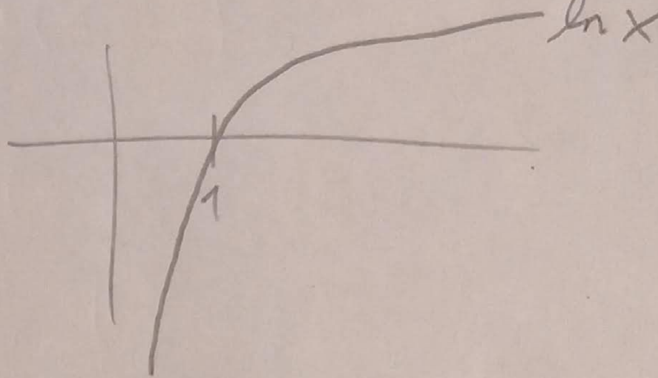
„$e^x, a^x > 0$ exponenciální funkce jsou vždy kladné"





7) logaritmus $f(x) = \ln x$ ($\log x$) „přirozený logaritmus"

$D_f = (0; +\infty)$

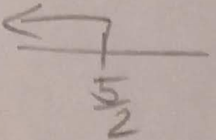


Př $f(x) = \sqrt{5-2x}$

D_f: $5-2x \geq 0$

$-2x \geq -5 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ „násobení - otáčí znaménko"

$x \leq \frac{5}{2}$



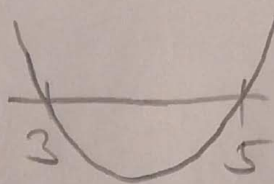
$D_f = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right\rangle$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_f$ „odmocnina je vždy nezáporná"

Př $f(x) = \log(x^2 - 8x + 15)$

D_f: $x^2 - 8x + 15 > 0$

$(x-3)(x-5)$



$D_f = (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$

Př $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{3-2x}$

D_f: 1) „dělení nulou"

$3-2x \neq 0$

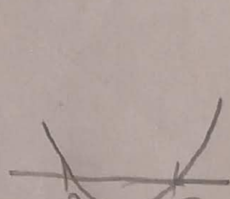
$x \neq \frac{3}{2}$

2) „odmocnina"

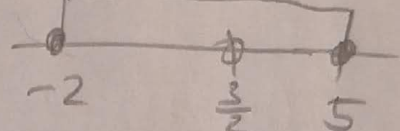
$-x^2 + 3x + 10 \geq 0$

$x^2 - 3x - 10 \leq 0$

$(x-5)(x+2) \leq 0$



$x \in \langle -2; 5 \rangle$



$D_f = \left\langle -2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 5\right\rangle$

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{3-2x} = \frac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

TABULKA:

	$\langle -2; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}; 5\rangle$
$\sqrt{-x^2+3x+10}$	$+$	$+$
-2	$-$	$-$
$\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\oplus$	$\ominus$

P_x: $\quad f(x) = 0$

$$\frac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x+10} = 0 \Leftrightarrow -x^2+3x+10 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-3x-10 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = -2;\ x_2 = 5$$

$P_{x_1} = [-2;0]$, $P_{x_2} = [5;0]$

$\boxed{Př}$ $\quad f(x) = \dfrac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}} = \dfrac{-3(x^2+3x-4)}{\sqrt{2x^2+6x-20}} = \dfrac{-3(x+4)(x-1)}{\sqrt{2x^2+6x-20}}$

TVAR (*)

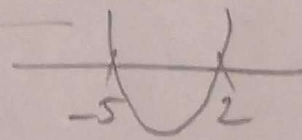
D_f: 1) "dělení nulou"

$\sqrt{2x^2+6x-20} \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2+6x-20 \neq 0$

2) "odmocnina"

$2x^2+6x-20 \geq 0$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} 2x^2+6x-20 &> 0 \\ x^2+3x-10 &> 0 \\ (x-2)(x+5) &> 0 \end{aligned}$$



$D_f = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

(vyřešeno z kroku (*))

TABULKA

nepatří do D_f

	$(-\infty;-5)$	$(-5;-4)$	$(-4;1)$	$(1;2)$	$(2;+\infty)$
-3	$-$				$-$
$\sqrt{2x^2+6x-20}$	$+$				$+$
$(x+4)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$				$-$

Posloupnost „postupně očíslovaná reálná čísla"

$a_1 = 2, \ a_2 = 3, \ a_3 = 4, \ a_4 = 5, \dots$

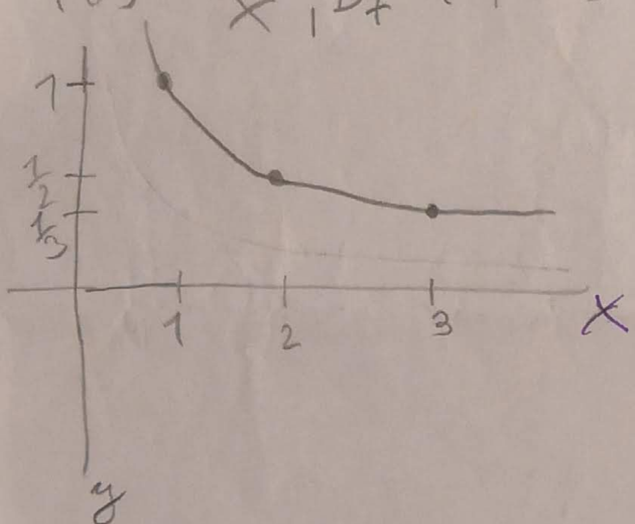
značení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

zadání vzorcem – např. $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

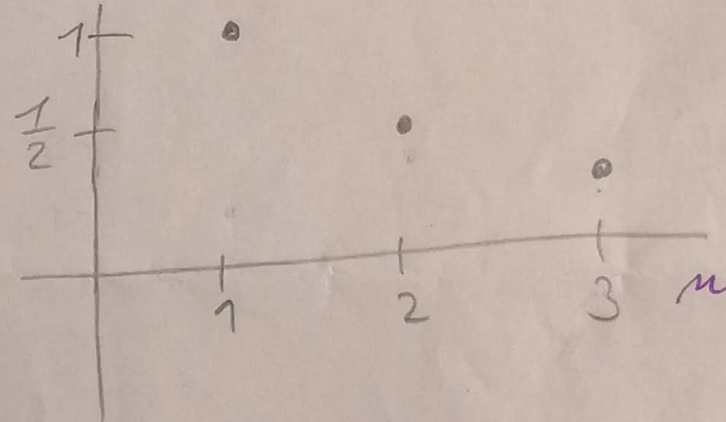
$(a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots)$

funkce vs. posloupnost

$f(x) = \frac{1}{x}, D_f = (0; +\infty)$



$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$



limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (v ∞) limitu a, pokud se členy posloupnosti blíží libovolně blízko k a, pro zvětšující se n.

značení $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

$a_n \to a$

Známé limity:

- $\lim n = +\infty$
- $\lim \frac{1}{n} = 0$

obecně $\lim n^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases}$

$\boxed{Př}$ $\lim n^3 = \infty$ $\boxed{Př}$ $\lim n^{-2} = 0$ $\boxed{Př}$ $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

- $\lim 2^n = \infty$
- $\lim 3^{-n} = 0$

obecně $\lim a^n = \begin{cases} \text{neex.}; & a \leq -1 \\ 0; & a \in (-1;1) \\ 1; & a = 1 \\ \infty; & a > 1 \end{cases}$

$\boxed{Př}$ $\lim (-1)^n$ neex, $\boxed{Př}$ $\lim \frac{1}{3}^n = 0$ $\boxed{Př}$ $\lim e^n = \infty$

Věty o aritmetice limit (VOAL)

$\lim a_n \pm b_n = \lim a_n \pm \lim b_n$

$\lim a_n \cdot b_n = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

} POKUD MÁ PRAVÁ STRANA SMYSL

Nedefinované výrazy:

- $\infty - \infty$
- $+\infty \cdot 0$
- $\frac{0}{\pm\infty}$
- $\frac{\pm\infty}{0}, \frac{a}{0}, \frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\boxed{Př}$ $\lim n^2 + 6n + 2 \overset{VOAL}{\underset{?}{=}} \lim n^2 + \lim 6n + \lim 2 \overset{VOAL}{\underset{?}{=}} \infty + \infty + 2 \underset{?}{=} +\infty$

$\boxed{Př}$ $\lim n^2 - 6n + 2 \overset{VOAL}{\underset{?}{=}} +\infty - \infty = ?$