I. Rovnice a nerovnice

A) lineární rovnice

$\boxed{\text{Př}}\boxed{1}$ $9 - 5x = 1 \quad / -9$

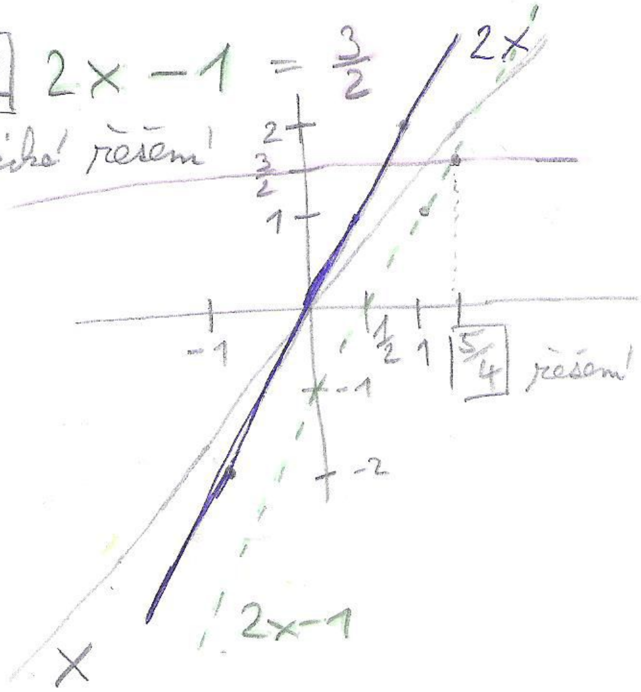
$-5x = -8 \quad / \cdot -\frac{1}{5}$

$x = \frac{8}{5}$

"ekvivalentní úpravy: přičtení čísla k oběma stranám rovnice, vynásobení obou stran rovnice nějakým číslem"

$\boxed{\text{Př}}\boxed{2}$ $2x - 1 = \frac{3}{2}$

grafické řešení



$x = \frac{5}{4}$

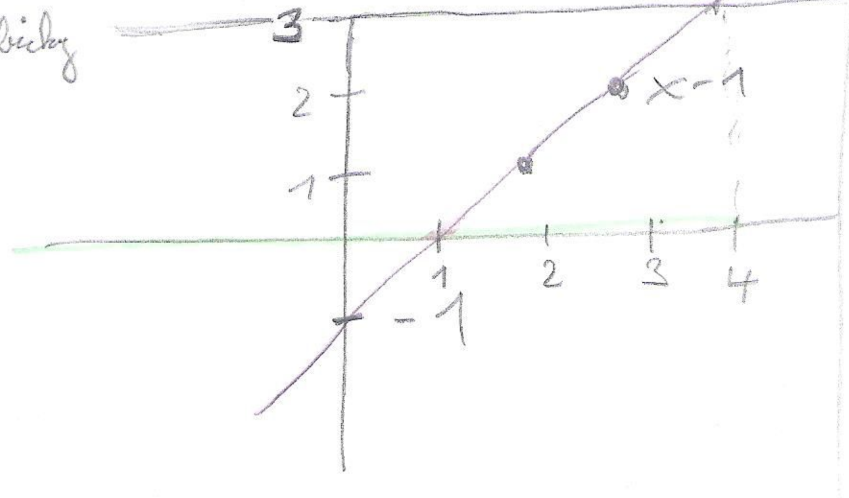
B) lineární nerovnice

$\boxed{\text{Př}}\boxed{3}$ $3x - 3 < 9 \quad / \cdot \frac{1}{3}$ (nejde to zjednodušit hned na začátku?)

$x - 1 < 3 \quad / +1$

$x < 4 \quad \ldots \quad x \in (-\infty, 4)$

graficky



$\boxed{\text{Př}}$ $x - 1 \geq 3$

$\vdots$

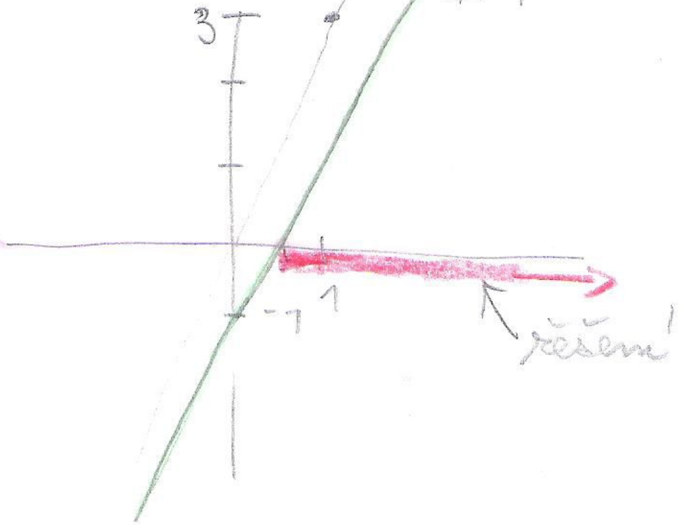
$x \in [4; +\infty)$

↑ uzavřený interval

(někdy se značí také $\langle 4; +\infty)$)

Př 4 $3x-1 \geq 0$

grafický:



Hledáme bod, kde se $3x-1$ a 0 rovnají, tedy $3x-1=0$

$x=\frac{1}{3}$

„nulový bod"

řešení $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Př 5 $3x-1<0$

Z předchozího příkladu víme, že pro $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ je $3x-1 \geq 0$

z toho tedy $3x-1<0$ pro $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

„tam, kde to není větší rovno je to menší"

„stačí udělat doplněk intervalu"

Př 6 $1-2x<3 \quad /-1$

$-2x<2 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ „násobím $\ominus\frac{1}{2}$ ... musím otočit nerovnost"

$x>-1$

c) lineární rovnice s absolutní hodnotou

Definice absolutní hodnoty:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Př $|3| = 3$

$|-3| = 3$

geometrická interpretace: vzdálenost od nuly

Př 7 $|x| = 1$

2 postupy:

α) „geometricky" čísla x jsou od nuly vzdálena o 1 ... $x = 1$, $x = -1$

β) Chci se zbavit absolutní hodnoty, řeším zvlášť pro $x < 0$, $x \geq 0$

i) pro $x < 0$ platí $|x| = -x$ => řeším rovnici $-x = 1$

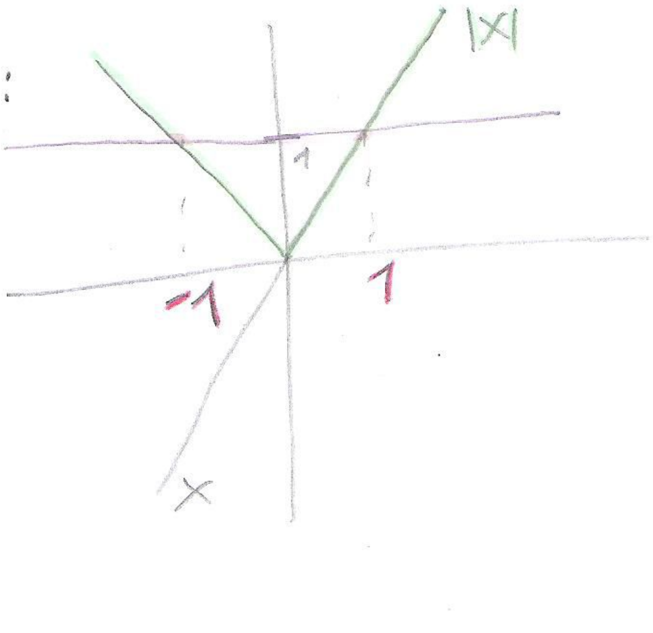
$x = -1$

úprava $|x| = -x$ platí pro $x < 0$, měl bych ověřit, zda mé řešení je < 0 ... $-1 < 0$ ... je to řešení

ii) pro $x \geq 0$ platí $|x| = x$ => řeším $x = 1 \geq 0$

kontrola

Graficky:



$\boxed{\text{Př}}\boxed{8}$ $|4x-5| = 14$

Chci se zbavit absolutní hodnoty, řeším kdy $4x-5<0$, $4x-5\geq 0$.

2 postupy jak to udělat:

A) výpočtem vyřeším nerovnici $4x-5<0$

$$4x<5$$
$$x<\frac{5}{4}$$

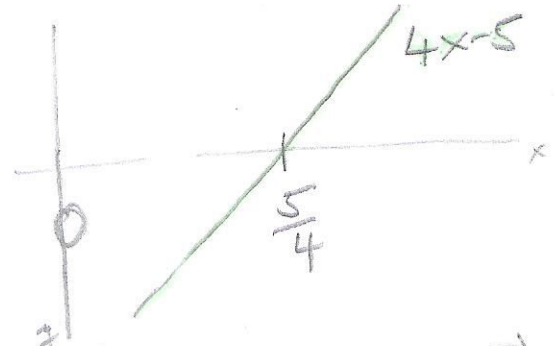
mám tedy pro $x\in(-\infty; \frac{5}{4})$ platí $4x-5<0$

z toho vím, že pro $x\in[\frac{5}{4};+\infty)$ platí $4x-5\geq 0$

viz řešení $\boxed{\text{Př}}\boxed{5}$

B) graficky, pomocí nulového bodu ... stejně jako $\boxed{\text{Př}}$ 4

$$4x-5=0$$
$$x=\frac{5}{4}$$



„u x je kladný člen vždy vpravo"

vidím, pro $x\in(-\infty; \frac{5}{4})$ je $4x-5<0$

„koukám na osu y"

pro $x\in[\frac{5}{4};+\infty)$ je $4x-5\geq 0$

Rozdělím na 2 případy

i) $x\in(-\infty; \frac{5}{4})$, $|4x-5| = -4x+5$

$\Rightarrow$ řeším $-4x+5=14$

$$-4x=9$$
$$x=-\frac{9}{4}\in(-\infty;\frac{5}{4})$$

ii) $x\in[\frac{5}{4};+\infty)$, $|4x-5|=4x-5$

$\Rightarrow$ řeším $4x-5=14$

$$4x=19$$
$$x=\frac{19}{4}\in[\frac{5}{4};+\infty)$$

Celkem $x=-\frac{9}{4}$, $x=\frac{19}{4}$ jsou řešení.

D) lineární nerovnice s abs. hod.

$\boxed{\text{Př}}\boxed{9}$ $|3x-6| \le 5$

Analogicky jako $\boxed{\text{Př}}\boxed{8}$.

řešíme, kdy $3x-6<0$, $3x-6\ge 0$. Postup a) z $\boxed{\text{Př}}\boxed{8}$:

$$3x-6<0$$
$$3x<6$$
$$x<2$$
$$x \in (\infty; 2)$$

Rozdělím na možnosti

i) $x \in (-\infty; 2)$

$$-3x+6 \le 5$$
$$-3x \le -1$$
$$x \ge \frac{1}{3}$$
$$x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \cap (-\infty; 2) =$$
$$= \left[\frac{1}{3}; 2\right)$$

ii) $x \in [2; +\infty)$

$$3x-6 \le 5$$
$$3x \le 11$$
$$x \le \frac{11}{3}$$
$$x \in \left(-\infty; \frac{11}{3}\right] \cap [2; +\infty) =$$
$$= \left[2; \frac{11}{3}\right)$$

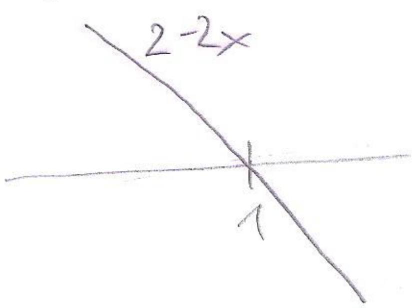
Celkem $x \in \left[\frac{1}{3}; 2\right) \cup \left[2; \frac{11}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right]$ splňují nerovnost $|3x-6| \le 5$.

$\boxed{Př}\boxed{10}$ $|2-2x|+10 \geq 11$

$|2-2x| \geq 1$

Postup b) z $\boxed{Př}\boxed{8}$: $2-2x=0$

$x=1$



„u x je záporný člen, směrnice klesá"

Rozdělíme na možnosti

i) $x \in (-\infty; 1)$

$2-2x \geq 1$

$-2x \geq -1$

$x \leq \frac{1}{2}$

$x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cap (-\infty; 1) =$

$= (-\infty; \frac{1}{2}]$

ii) $x \in [1; +\infty)$

$-2+2x \geq 1$

$2x \geq 3$

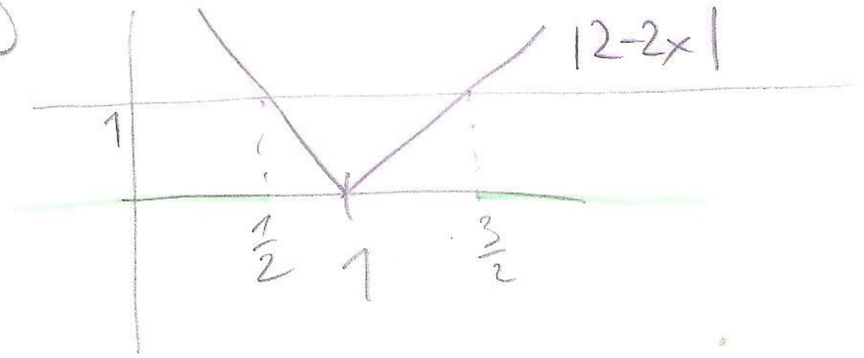
$x \geq \frac{3}{2}$

$x \in [\frac{3}{2}; +\infty) \cap [1; +\infty) =$

$= [\frac{3}{2}; +\infty)$

Celkem $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$ splňuje ner. $|2-2x| \geq 1$.

grafický



$\boxed{\text{Pozn.}}$

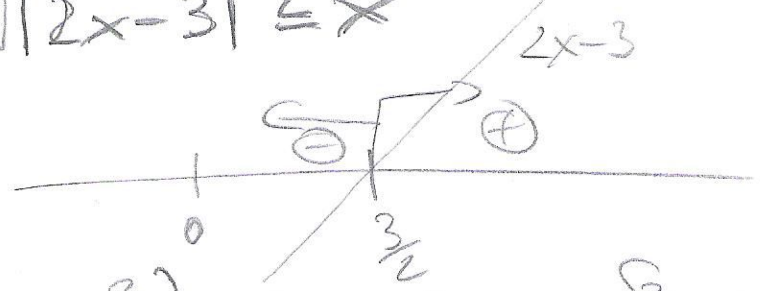
Platí $|2-2x| = |2x-2|$ ... Příklad $|2x-2|+10 \geq 11$ vyjde stejně.

zdůvodnění:

$|2-2x| = |(-1)(2x-2)| = \underbrace{|-1|}_{1}\,|2x-2| = |2x-2|$

6

$\boxed{Př}$ $\boxed{11}$ $|2x-3| \le x$



i) $x \in (-\infty; \frac{3}{2})$

$-2x+3 \le x$

$-3x \le -3$

$x \ge 1$

$x \in [1; \frac{3}{2})$

ii) $x \in [\frac{3}{2}; +\infty)$

$2x-3 \le x$

$x \le 3$

$x \in [\frac{3}{2}; 3]$

$x \in [1; 3]$

$\boxed{Př}$ $\boxed{12}$ $|\frac{3}{5}x - \frac{21}{7}| \le -3$ ... nemá řeš. $-3 < 0$

abs. hod. nezáporná

E) rovnice s abs 2°

$\boxed{Př}$ $||x-1|-4| = 3$ kdy je vnitřek $||$ kladný/záporný?

řešme nerovnici

i) $|x-1|-4<0$

$|x-1|<4$

1

i_i) $x\in(-\infty;1)$

$-x+1<4$

$-x<3$

$x>-3$

$x\in(-3;1)$

i_{ii}) $x\in[1;+\infty)$

$x-1<4$

$x<5$

$x\in[1;5)$

$\Rightarrow$ pro $x\in(-3;5)$ platí

$||x-1|-4| = -|x-1|+4$

$\Rightarrow$ řešme

$-|x-1|+4=3$

$-|x-1|=-1$

$|x-1|=1$

$x\in\{0,2\}\cap(-3;5)$

ii) pro $x\in(-\infty;-3]\cup[5;+\infty)$

platí $||x-1|-4| = |x-1|-4$

řešme $\Rightarrow$

$|x-1|-4=3$

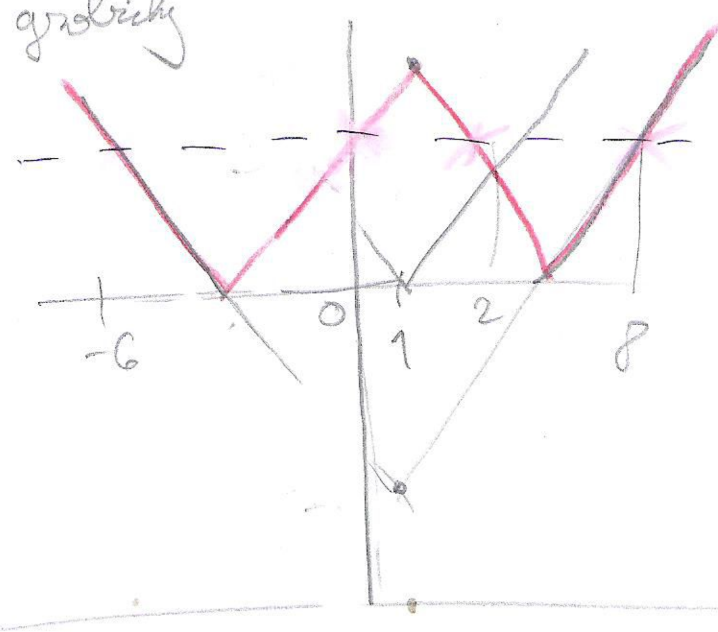
$|x-1|=7$

$x\in\{8;-6\}\cap \ldots$

$\|$

$\{8;-6\}$

grafický



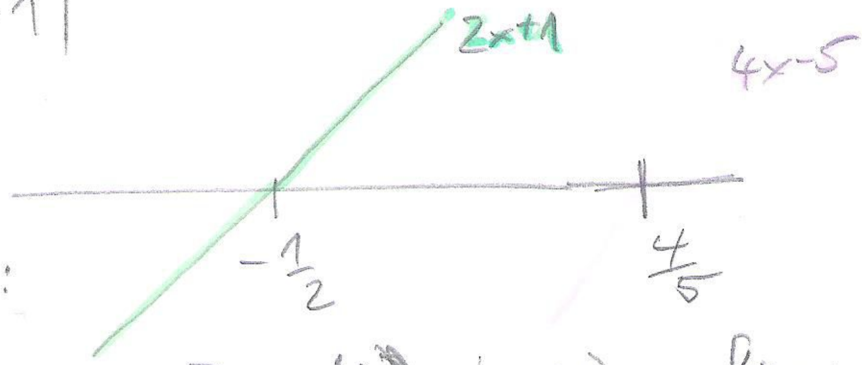
celkem $x\in\{-6,0,2,8\}$

jsou řešení

F) nerovnice s abs 2°

Př $|4x-5| \leq |2x+1|$

najdeme nulové body:



rozklad na 3 možnosti:

i) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$

řešíme

$-4x+5 \leq -2x-1$

$-2x \leq -6$

$x \geq 3$

$x \in (3; +\infty) \cap (-\infty; -\frac{1}{2})$

$= \emptyset$

ii) $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{4}{5})$

řešíme

$-4x+5 \leq 2x+1$

$-6x \leq -4$

$x \geq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$x \in [\frac{2}{3}; \frac{4}{5})$

iii) $x \in [\frac{4}{5}; +\infty)$

$4x-5 \leq 2x+1$

$2x \leq 6$

$x \leq 3$

$x \in [\frac{4}{5}; 3]$

Nerovnost je splněna pro $x \in [\frac{2}{3}; 3]$.