Hledání extrému

$f(x), \; x \in M$

spojitá fce — kompaktní množina (omezená, uzavřená)

$M = \partial M \cup M^\circ$

∂M … hranice M, M° … vnitřek M

$\rightarrow$ f nabývá svých extrémů

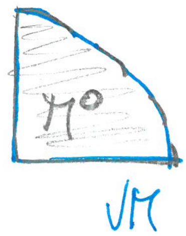


Schéma nalezení extrému

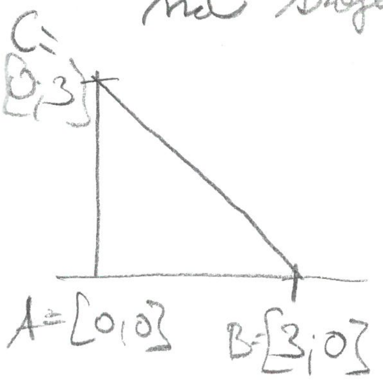
(A) najdeme kandidáty v M° – stacionární body

(B) najdeme kandidáty na ∂M

(C) srovnáme hodnoty kandidátů, najdeme min/max

1. Dosazovací metoda

$\boxed{\text{Př}}$ Najděte extrémy $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$
na trojúhelníku Δ vrchol $A=[0;0]$, $B=[3;0]$, $C=[0;3]$



(A) kandidáti uvnitř M

$\partial_x f(x,y) = 2x + 4y - 6$

$\partial_y f(x,y) = -4y + 4x$

$2x + 4y - 6 = 0$

$-4y + 4x = 0 \rightarrow y = x$

$\rightarrow \quad 2x + 4x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1 \qquad y = 1$

$\rightarrow$ Stacionární bod: $[1;1]$

$f(1;1) = 1 - 2 + 4 - 6 - 1 = -4$

bod $[1;1]$ je kandidát na extrém

(B) 3 strany + 3 vrcholy

a) strana AB : rovnice $y=0$ omezení $x \in [0;3]$

$y=0$ dosadíme do f

$h(x) = f(x,0) = x^2 - 6x - 1$ ... parabola

najdeme extrém ... vrchol

pomocí derivace $h'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$

$y = 0$

$f(3;0) = 9 - 6 \cdot 3 - 1 = -10$

bod $[3;0]$ je kandidát na extrém

b) strana AC : rovnice $x=0$ omezení $y \in [0;3]$

$x=0$ dosadíme do f

$h(x) = f(0,y) = -2y^2 - 1$ ... parabola

najdeme extrém

$h'(y) = -4y$

$-4y = 0 \quad y = 0$

$x = 0$

$f(0;0) = -1$

bod $[0;0]$ je kandidát na extrém

c) strana CB vzťah = ?

priamka prechádzajúca body C, B $\quad y = ax + b$

dosaď C: $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

dosaď B: $0 = a \cdot 3 + b$

$$3a = -3$$
$$a = -1$$

$\Rightarrow$ vzťah $y = -x + 3, \; x \in [0; 3]$

dosadíme do f

$$h(x) = f(x, -x+3) = x^2 - 2(-x+3)^2 + 4x(-x+3) - 6x - 1$$

$$= x^2 - 2[x^2 - 6x + 9] - 4x^2 + 12x - 6x - 1 =$$

$$= -5x^2 + 18x - 19$$

nájdeme extrém h

$h'(x) = -10x + 18, \quad -10x + 18 = 0$

$$x = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{9}{5} + 3 = \frac{6}{5}$$

$$f\left(\frac{9}{5}; \frac{6}{5}\right) = -5\,\frac{81}{25} + 18\,\frac{9}{5} - 19 = -\frac{81}{5} + 2 \cdot \frac{81}{5} - \frac{95}{5} =$$

$$= \frac{81 - 95}{5} = \frac{-14}{5}$$

bod $[\frac{9}{5}; \frac{6}{5}]$ je kandidát na extrém

7

d) vrchol: každý vrchol je kandidát na extrém

[3;0], [0;0] již máme

$C = [0;3]$ $f(0;3) = -2 \cdot 9 - 1 = -19$

Kandidáti:

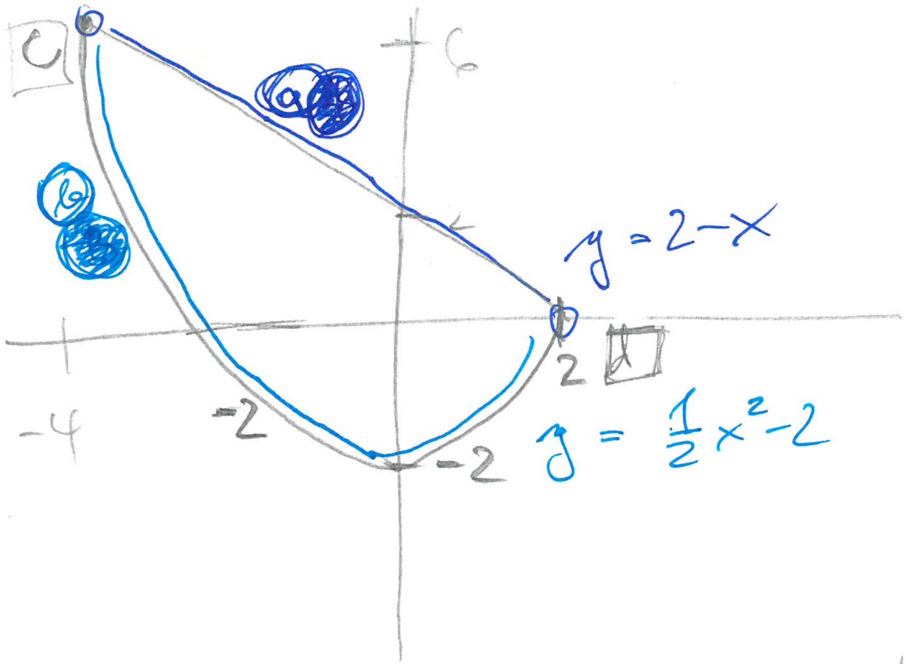
$$\left.\begin{aligned} f(1;1) &= -4 \\ f(3;0) &= -10 \\ f(0;0) &= -1 \\ f\left(\tfrac{9}{5};\tfrac{6}{5}\right) &= -\frac{14}{5} \\ f(0;3) &= -19 \end{aligned}\right\}$$

minimum $f(0;3) = -19$

maximum $f(0;0) = -1$

$\boxed{Př}_{2}$ $f(x,y) = y - x$

$M = \{[x,y] : -4 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x^2 - 2 \le y \le 2 - x\}$



• f lineární ⇒ f nemá stacionární body

⇒ řešíme vázaný extrém na hranici

(a) f lineární, lineární vazba ⇒ kandidáti na extrém jsou ve vrcholech $\boxed{C}$, $\boxed{D}$

(b) $g(x) = f(x, \frac{1}{2}x^2 - 2) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$

$g'(x) = x - 1$

$x = 1,\ y = \frac{1}{2}\,1 - 2 = -\frac{3}{2}$

bod $[1; -\frac{3}{2}]$ je kandidát na extrém

$f(1; -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$ MIN

$\boxed{D}$ $f(2;0) = -2$

$\boxed{C}$ $f(-4;6) = 6+4 = 10$ MAX

KANDIDÁTI

Př 1

Najděte extrémy funkce f na úsečce AB

$$f(x,y) = x^2 + 3x + 2y^2 + 4y$$
$$A = [-4;-1], \; B = [2;2]$$

$-1 = a\cdot(-4) + b \Rightarrow b = 4a - 1$

$2 = a \cdot 2 + b$ 　　　 $y = ax + b$

$2 = 2a + 4a - 1$

$6a = 3$

$a = \frac{1}{2} \quad b = 4\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1$

$\Rightarrow$ rovnice $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1, \; x \in [-4;2]}$

dosadíme do f

$h(x) = f(x, \frac{1}{2}x+1) = x^2 + 3x + 2(\frac{1}{2}x+1)^2 + 4(\frac{1}{2}x+1) =$

$= x^2 + 3x + 2[\frac{1}{4}x^2 + x + 1] + 2x + 4 =$

$= \frac{3}{2}x^2 + 7x + 6$

$h'(x) = 3x + 7 = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{3} \quad y = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{7}{3}) + 1 =$

$= -\frac{1}{6}$

$f(-\frac{7}{3}; -\frac{1}{6}) = \frac{3}{2}(\frac{49}{9}) - \frac{49}{3} + 6 = -\frac{49}{6} + \frac{36}{6} = -\frac{13}{6}$

bod $[-\frac{7}{3}; -\frac{1}{6}]$ je kandidát na extrém.

KRAJNÍ BODY (jsou vždy kandidáty)

$f(-4;-1) = 16 - 12 + 2 - 4 = 2$ 　　 $f(-\frac{7}{3}; -\frac{1}{6}) = -\frac{13}{6}$ MIN

$f(2;2) = 4 + 6 + 8 + 8 = 26$ MAX

Pozn.

Lineární funkce nemá stacionární body.
=> Nejsou kandidáti uvnitř M.

Lineární funkce na lineární vazbě nemá stacionární body. => Kandidáti jsou pouze vrcholy.

Úloha:

Najděte extrémy funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na množině
spojitá

$M = \{[x,y];\ g(x,y) = 0\}$

Jacobiho metoda

Řešení soustavy

$$\partial_x f \, \partial_y g - \partial_y f \, \partial_x g = 0$$
$$g = 0$$

jsou kandidáti na extrém.

Lagrangeovy multiplikátory

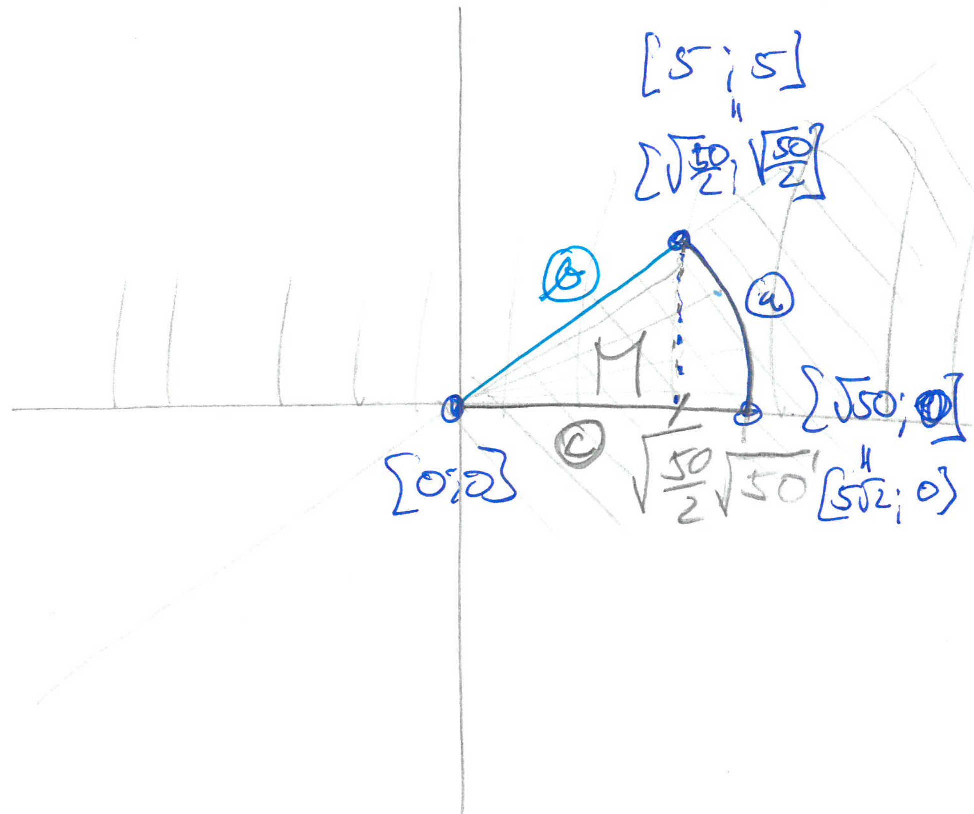
Řešení soustavy

$$\partial_x f + \lambda \partial_x g = 0$$
$$\partial_y f + \lambda \partial_y g = 0$$
$$g = 0$$

(kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je neznámá) jsou kandidáti na extrém.

Př. 3 $f(x,y) = 7x + y$

$M = \{[x,y] : x^2+y^2 \le 50,\ y \ge 0,\ x \ge y\}$



Kde se vazby protínají

$y = x$

$x^2+y^2=50$

$2y^2 = 50$

$y = \pm\sqrt{\frac{50}{2}} =$

$= \pm\sqrt{25} = \pm 5$

(A) kandidáti uvnitř M

f lineární ⇒ f nemá stac. body ⇒ nejsou kandidáti uvnitř M

(B) kandidáti na hranici M

(a) vazba $x^2+y^2=50$ Jacobiho matice

$g = x^2+y^2-50$

$\partial_x f = 7$ $\partial_x g = 2x$

$\partial_y f = 1$ $\partial_y g = 2y$

$\partial_x f\, \partial_y g - \partial_y f\, \partial_x g = 0$

$y = 0$

$7 \cdot 2y - 2x = 0 \Rightarrow x = 7y$

$x^2+y^2-50=0$

$50y^2 = 50$ $y = \pm 1$ $x = \pm 7$

$[7,1]$ je kandidát, ostatní body nejsou na hranici M

(b) vrstva $y=x$

f lineární, lineární vrstva => nejsou kandidáti

(c) vrstva $y=0$ stejné

(d) VRCHOLY

SEZNAM KANDIDÁTŮ

$f(7;1)=50$ MAX

$f(5;5)=\cancel{7}\cdot 5+5=40$

$f(\sqrt{50};0)=7\cdot 5\sqrt{2}\approx 49$

$f(0;0)=0$ MIN

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y$

$M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq x^2 - 4\}$

Protínají se vůbec?

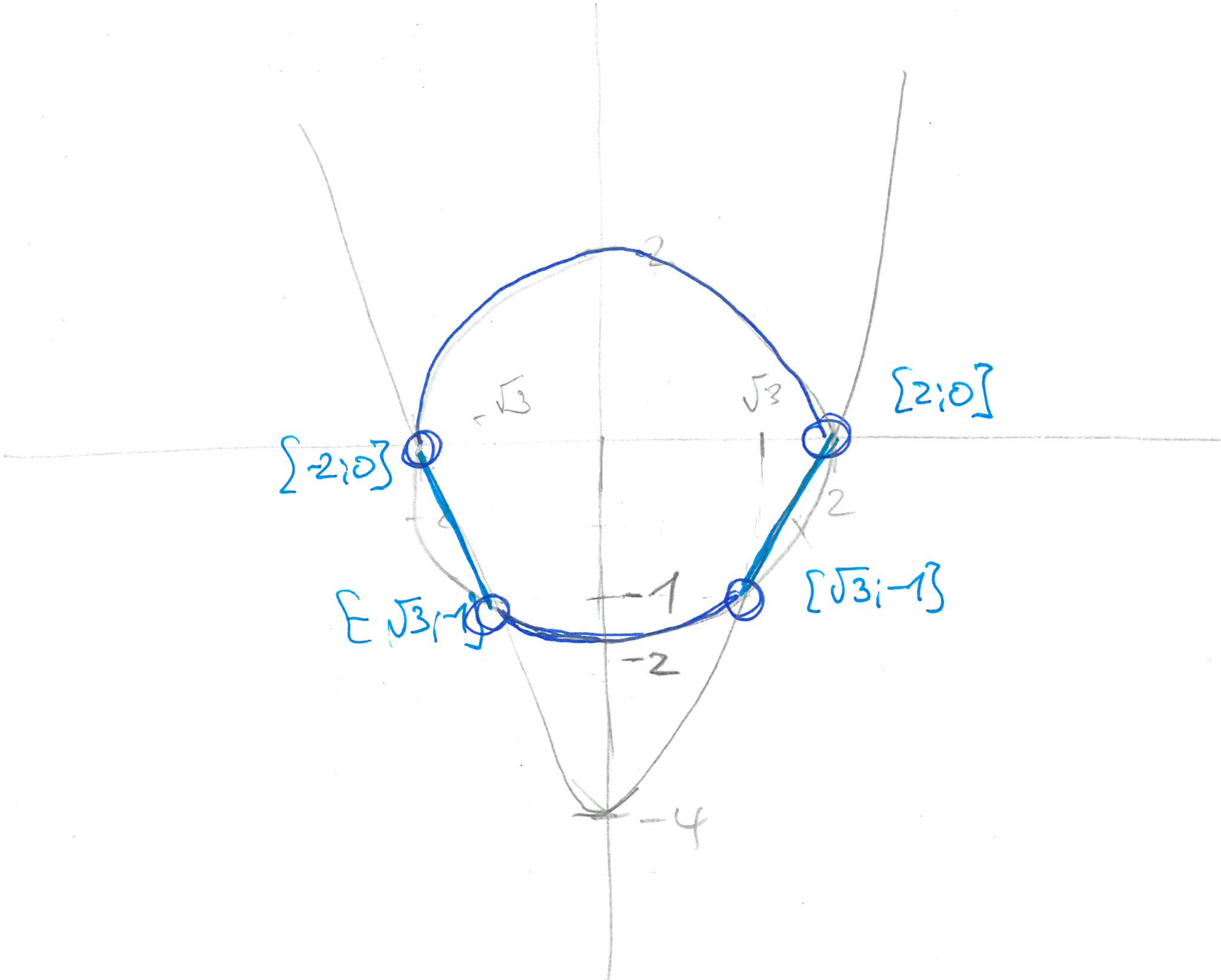
$$\boxed{\begin{aligned} y &= x^2 - 4 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}} \rightarrow x^2 = y + 4$$

$$y^2 + y + \cancel{4} = \cancel{4}$$

$y = 0 \qquad y = -1$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x = \pm 2 \qquad x = \pm\sqrt{3}$



Ⓐ kandidáti uvnitř M

$$\nabla_x f = \boxed{x = 0}$$
$$\nabla_y f = \boxed{1 = 0} \to \text{není nikdy splněno}$$

⇒ neexistuje stac. bod

⇒ žádní kandidáti

Ⓑ kandidáti na hranici M

a) vazba $x^2+y^2=4$ Jacobiho metoda (bez součinu i Lagrange multi)

$g(x,y) = x^2+y^2-4$

$\nabla_x g = 2x$

$\nabla_y g = 2y$

$$\nabla_x f \, \nabla_y g - \nabla_y f \, \nabla_x g = 0$$
$$g = 0$$

$$x\,2y - 2x = 0$$
$$x^2+y^2 = 4$$

$x(2y-2) = 0$

$\Rightarrow \quad x=0 \lor y=1$

$y = \pm 2 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

KANDIDÁTI $[0;2]$ $[0;-2]$ $[\sqrt{3};1]$ $[-\sqrt{3};1]$ všechni $\in M$

b) vazba $y = x^2-4$ dosazovací metoda

$h(x) = f(x, x^2-4) = \frac{1}{2}x^2 + x^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 4$

$h'(x) = 3x$

$x = 0 \to y = -4 \quad .. [0,-4] \notin M$

c) vrchol jsou kandidáti automaticky

SEZNAM KANDIDÁTŮ:

$f(0;2) = 2$

$f(0;-2) = -2 \leftarrow$ MIN

$f(\sqrt{3};1) = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$

$f(-\sqrt{3};1) = \frac{5}{2}$ MAX

$f(-2;0) = 2$

$f(2;0) = 2$

$f(-\sqrt{3};-1) = \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$

$f(\sqrt{3};-1) = \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$

Funkce f nabývá svých maxim na množině M v bodě $[\sqrt{3};1]$ a $[-\sqrt{3};1]$, hodnota maxima je $\frac{5}{2}$.

(" " " —||— " " minima na " " M

" " $[0;-2]$ " " " " minima je -2.)