10. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Příklad 1 Spočtěte následující limitu daných posloupností:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}-\sqrt{n^3-6n^2+3}}{\sqrt{n}}$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^4-3n^2-6}-\sqrt{n^4+3n^2+6}$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-15n+2}(1-n)}{2(n-2)^3-2n^3}$.

Příklad 2 Pro danou kvadratickou funkci f a danou přímku najděte všechny body $x \in \mathbb{R}$ takové, že v těchto bodech je daná přímka tečnou ke grafu dané kvadratické funkce. Neznámé parametry v rovnici přímky dopočtěte:

(a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ a přímka $y = -5x + q$;

(b) $f(x) = -1/2x^2 + 2x + 12$ a přímka $y = 3x - q$.

Příklad 3 Pro dané funkce vyšetřete jejich průběh

(a) $f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x-3}$;

(b) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x+1}$.

Řešení 1a Použijeme rozšíření pomocí vzorečku $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ abychom se zbavili ošklivých druhých odmocnin a pak už jde o standardní výpočet limity podílu polynomů - vytkneme nejvyšší mocninu nahoře a nejvyšší dole a dostaneme výsledek.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2}-\sqrt{n^3-6n^2+3}}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^3+5n^2}-\sqrt{n^3-6n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^3+5n^2}+\sqrt{n^3-6n^2+3}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+5n^2}+\sqrt{n^3-6n^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+5n^2-(n^3-6n^2+3)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+5n^2}+\sqrt{n^3-6n^2+3}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{11n^2+3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+5n^2}+\sqrt{n^3-6n^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(11+3/n^2)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3}\sqrt{1+5/n}+\sqrt{n^3}\sqrt{1-6/n+3/n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(11+3/n^2)}{\sqrt{n}\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+5/n}+\sqrt{1-6/n+3/n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(11+3/n^2)}{n^2\left(\sqrt{1+5/n}+\sqrt{1-6/n+3/n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{11+3/n^2}{\sqrt{1+5/n}+\sqrt{1-6/n+3/n^3}} = \frac{11+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}} = 11/2.$$

Řešení 1b Použijeme rozšíření pomocí vzorečku $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ abychom se zbavili ošklivých druhých odmocnin a pak už jde o standardní výpočet limity podílu polynomů - vytkneme nejvyšší mocninu nahoře a nejvyšší dole a dostaneme výsledek.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4-3n^2-6}-\sqrt{n^4+3n^2+6} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^4-3n^2-6}-\sqrt{n^4+3n^2+6}\right)\left(\sqrt{n^4-3n^2-6}+\sqrt{n^4+3n^2+6}\right)}{\sqrt{n^4-3n^2-6}+\sqrt{n^4+3n^2+6}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-3n^2-6-(n^4+3n^2+6)}{\sqrt{n^4-3n^2-6}+\sqrt{n^4+3n^2+6}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-6n^2-12}{\sqrt{n^4-3n^2-6}+\sqrt{n^4+3n^2+6}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(-6-12/n^2)}{\sqrt{n^4}\sqrt{1-3/n^2-6/n^4}+\sqrt{n^4}\sqrt{1+3/n^2+6/n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(-6-12/n^2)}{n^2\left(\sqrt{1-3/n^2-6/n^4}+\sqrt{1+3/n^2+6/n^4}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-6-12/n^2}{\sqrt{1-3/n^2-6/n^4}+\sqrt{1+3/n^2+6/n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-6-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{1+0+0}} = -3.$$

Řešení 1c Jde o standardní výpočet limity podílu polynomů - vytkneme nejvyšší mocninu nahoře a nejvyšší dole a dostaneme výsledek. Pouze nejprve musíme ve jmenovateli použít vzoreček $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pro třetí mocninu závorky ve jmenovateli.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-15n+2}(1-n)}{2(n-2)^3-2n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2}\sqrt{1-15/n+2/n^2}n(1/n-1)}{2(n^3-6n^2+12n-8)-2n^3} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sqrt{1-15/n+2/n^2}(1/n-1)}{-12n^2+24n-16} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sqrt{1-15/n+2/n^2}(1/n-1)}{n^2(-12+24/n-16/n^2)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-15/n+2/n^2}(1/n-1)}{-12+24/n-16/n^2} = \frac{\sqrt{1-0+0}(0-1)}{-12+0-0} = 1/12.$$

Řešení 2a Použijeme dvou známých faktů - zaprvé, směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě je rovna hodnotě první derivace v daném bodě a zadruhé, tečna ke grafu dané funkce v daném bodě se v daném bodě shoduje s danou funkcí. Obdobně jako an cvičení tedy lze pro tečnu $p(x) = kx + q$ k funkci $f(x)$ v bodě $a \in D_f$ psát $k = f'(a)$ a dopočíst q z rovnice $f(a) = p(a)$.
V našem případě tedy fakt, že $y = -5x + q$ je tečna ke grafu $f(x) = 3x^2 + x - 2$ znamená, že hledáme body $a \in \mathbb{R}$ pro které platí $f'(a) = -5$. Snadno spočteme, že $f'(x) = 6x + 1$ a tedy z rovnice $f'(a) = -5$ dostáváme jediné řešení a to bod $a = -1$. Pro dopočtení q využijeme rovnici $p(a) = f(a)$, která po dosazení nabývá tvaru $(-5)(-1)+q = 3(-1)^2+(-1)-2$ a dostáváme $q = -6$. Celkem tedy je přímka $p(x) = -5x - 6$ tečnou ke grafu funkce f v bodě -1.

Řešení 2b Použijeme dvou známých faktů - zaprvé, směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě je rovna hodnotě první derivace v daném bodě a zadruhé, tečna ke grafu dané funkce v daném bodě se v daném bodě shoduje s danou funkcí. Obdobně jako an cvičení tedy lze pro tečnu $p(x) = kx + q$ k funkci $f(x)$ v bodě $a \in D_f$ psát $k = f'(a)$ a dopočíst q z rovnice $f(a) = p(a)$.
V našem případě tedy fakt, že $y = 3x - q$ je tečna ke grafu $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 12$ znamená, že hledáme body $a \in \mathbb{R}$ pro které platí $f'(a) = 3$. Snadno spočteme, že $f'(x) = x + 2$ a tedy z rovnice $f'(a) = 3$ dostáváme jediné řešení a to bod $a = 1$. Pro dopočtení q využijeme rovnici $p(a) = f(a)$, která po dosazení nabývá tvaru $3 \cdot 1 - q = -0.5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 12$ a dostáváme $q = -16,5$. Celkem tedy je přímka $p(x) = 3x + 16,5$ tečnou ke grafu funkce f v bodě 1.

Řešení 3a

Provedeme standardních deset kroků. Výsledný náčrtek je na stránkách přednášejícího - Úkol 12, př. 8 - naše funkce je pouze třikrát větší, tedy důležité rysy bude mít totožné.

Definiční obor Protože $f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x-3}$, evidentně $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

Limity v krajních bodech definičního oboru Jednoduše lze spočítat limity v nekonečnech. Pro limity okolo bodu 3 je zapotřebí použí pravidla "o dělení kladnou a zápornou nulou".
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3-3/x-6/x^2)}{x(1-3/x)} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{3-3/x-6/x^2}{1-3/x} = +\infty \cdot \frac{3-0-0}{1-0} = +\infty.$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(3-3/x-6/x^2)}{x(1-3/x)} = \lim_{x\to-\infty} x\frac{3-3/x-6/x^2}{1-3/x} = -\infty \cdot \frac{3-0-0}{1-0} = -\infty.$

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = \lim_{x\to 3_-} \frac{3\cdot 3^2-3\cdot 3-6}{x-3} = \underbrace{\lim_{x\to 3_-} \frac{12}{x-3}}_{12/0_-} = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 3_+} f(x) = \lim_{x\to 3_+} \frac{3\cdot 3^2-3\cdot 3-6}{x-3} = \underbrace{\lim_{x\to 3_+} \frac{12}{x-3}}_{12/0_+} = +\infty.$$

Průsečíky s osami Průsečík s osou y získáme dosazením $x = 0$ - tedy $P_y = [0; 2]$. Co se týče průsečíků s osou x, je zapotřebí vyřešit rovnici $f(x) = 0$. Víme, že zlomek je roven nule právě tehdy, když je nulový čitatel. Tedy stačí vyřešit rovnici $3x^2 - 3x - 6 = 0$. Vidíme, že po vydělení 3 celé rovnice lze použít Vietovy vzorce a psát naší rovnici ve tvaru $(x-2)(x+1) = 0$. Tedy máme dva průsečíky s osou x - $P_x^1 = [-1; 0]$ a $P_x^2 = [2; 0]$.

Paritu funkce (je sudá, lichá nebo ani jedno) Vidíme, že dokonce ani definiční obor není souměrný podle počátku (nuly) a tedy funkce nemůže mít paritu.

Intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající Víme, že je zapotřebí nejprve spočíst první derivaci dané funkce:
$f'(x) = \left(\frac{3x^2-3x-6}{x-3}\right)' = \frac{(6x-3)(x-3)-(3x^2-3x-6)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{(6x^2-21x+9)-(3x^2-3x-6)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2} = \frac{3(x^2-6x+5)}{(x-3)^2} = \frac{3(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$.
Odtud snadno určíme nulové body první derivace a intervaly monotonie. Konkrétně, funkce f má dva stacionární body $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ a je rostoucí postupně an intervalech $(-\infty; 1) \cup (5; \infty)$ a naopak je klesající na intervalu $(1; 5)$.

Intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní Víme, že je zapotřebí spočíst druhou deriavcidané funkce:
$f''(x) = \left(\frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(6x-18)(x-3)^2-2(x-3)(3x^2-18x+15)}{(x-3)^4} = \frac{(x-3)\big((6x-18)(x-3)-2(3x^2-18x+15)\big)}{(x-3)^4} = \frac{6x^2-36x+54-6x^2+36x-30}{(x-3)^3} = \frac{24}{(x-3)^3}$.
Odtud vidíme, že f je konvexní na intervalu $(3; +\infty)$ a naopak konkávní na intervalu $(-\infty; 3)$ a nemá žádné inflexní body.

Stacionární body funkce Funkce f má dva stacionární body $s_1 = 1$, $s_2 = 5$.

Lokální extrémy funkce a inflexní body Z výše uvedeného je jasné (monotonie na okolí bodů), že s_1 je bodem lokálního maxima a s_2 je bodem lokálního minima.

Asymptoty funkce v krajních bodech definičního oboru Z počítání jednostraných limit vydíme, že v bodě 3máme asymptotu bez směrnice - tj. přímku $x = 3$ kolmou an osu x.
Co se týče asymptot se směrnicí, je zapotřebí vyšetřit obě nekonečna. Nejprve tedy spočtěme pro naší asymptotu u $+\infty$ směrnici k_1. Pokud existuje, víme, že je vyjádřena následující limitou a tedy jejím spočtením níže dostáváme, že asymptota v $+\infty$ existuje a má směrnici 3.
$k_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x-6}{x(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)(3-3/x-6/x^2}{x^2(1-3/x)} = \frac{3-0-0}{1-0} = 3$.
Všimněme si, že pokud bychom počítali směrnici k_2 asymptoty v $-\infty$, pak použijeme stejnou

formulku $k_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)/x$. Na výpočet této limity lze použít úplně stejný postup a dostaneme úplně stejný výsledek. Tudíž existuje i asymptota v $-\infty$ a ta má směrnici $k_2 = 3$.
Pokud budeme chtít dopočíst absolutní členy obou směrnici - označme je q_1 a q_2 - musíme použít vzoreček $q = \lim_{x\to\pm} f(x) - kx$. Můžeme tedy počítat:
$q_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x-6}{x-3} - 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x-6-3x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x-6-3x^2+9x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-6}{x-3} = 6.$
$q_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-3x-6}{x-3} - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-3x-6-3x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-3x-6-3x^2+9x}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x-6}{x-3} = 6.$
Dohromady tedy má funkce dvě asymptoty (v $+\infty$ a v $-\infty$), které splývají a mají rovnici $y = 3x+6$.

Řešení 3b

Provedeme standardních deset kroků. Výsledný náčrtek je na stránkách přednášejícího - Úkol 12, př. 14.

Definiční obor Protože $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x+1}$, evidentně $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Limity v krajních bodech definičního oboru Jednoduše lze spočítat limity v nekonečnech. Pro limity okolo bodu 3 je zapotřebí použí pravidla “o dělení kladnou a zápornou nulou”.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-5/x+4/x^2)}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1-5/x+4/x^2}{1+1/x} = +\infty \cdot \frac{1-0-0}{1-0} = +\infty.$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-5/x+4/x^2)}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to-\infty} x\frac{1-5/x+4/x^2}{1+1/x} = -\infty \cdot \frac{1-0-0}{1-0} = -\infty.$
$\lim_{x\to-1_-} f(x) = \lim_{x\to-1_-} \frac{(-1)^2-5\cdot(-1)+4}{x+1} = \underbrace{\lim_{x\to-1_-} \frac{10}{x+1} = -\infty}_{10/0_-}.$
$\lim_{x\to-1_+} f(x) = \lim_{x\to-1_+} \frac{(-1)^2-5\cdot(-1)+4}{x+1} = \underbrace{\lim_{x\to-1_+} \frac{10}{x+1} = +\infty}_{10/0_+}.$

Průsečíky s osami Průsečík s osou y získáme dosazením $x = 0$ - tedy $P_y = [0; 4]$. Co se týče průsečíků s osou x, je zapotřebí vyřešit rovnici $f(x) = 0$. Víme, že zlomek je roven nule právě tehdy, když je nulový čitatel. Tedy stačí vyřešit rovnici $x^2 - 5x + 4 = 0$. Vidíme, že lze použít Vietovy vzorce a psát naší rovnici ve tvaru $(x - 1)(x - 4) = 0$. Tedy máme dva průsečíky s osou x - $P_x^1 = [-4; 0]$ a $P_x^2 = [-1; 0]$.

Paritu funkce (je sudá, lichá nebo ani jedno) Vidíme, že dokonce ani definiční obor není souměrný podle počátku (nuly) a tedy funkce nemůže mít paritu.

Intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající Víme, že je zapotřebí nejprve spočíst první derivaci dané funkce:
$f'(x) = \left(\frac{x^2-5x+4}{x+1}\right)' = \frac{(2x-5)(x+1)-(x^2-5x+4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-3x-5-x^2+5x-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-9}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-10}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-10}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10})}{(x+1)^2}.$
Odtud snadno určíme nulové body první derivace a intervaly monotonie. Konkrétně, funkce f má dva stacionární body $s_1 = -1 - \sqrt{10}$, $s_2 = -1 + \sqrt{10}$ a je rostoucí postupně na intervalech

$(-\infty; s_1) \cup (s_2; \infty)$ a naopak je klesající na intervalu $(s_1; s_2)$. Zde je šikovné si všimnout, že znaménko první derivace určuje pouze čitatel (jmenovatel je vždy kladný) a ten je ve tvaru kvadratiké funkce která je *konvexní* (koeficient u x^2 je kladný).Tedy tato funkce musí být záporná na intervalu mezi svými kořeny a naopak kladná všude jinde. Nemusíme tedy zkoušet dosazovat.

Intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní Víme, že je zapotřebí spočíst druhou deriavcidané funkce:
$f''(x) = \left(\frac{x^2+2x-9}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-9)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)^3-(x^2+2x-9)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)^2-(x^2+2x-9)2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x+18}{(x+1)^3} = \frac{20}{(x+1)^3}$.
Odtud vidíme, že f je konvexní na intervalu $(-1; +\infty)$ a naopak konkávní na intervalu $(-\infty; -1)$ a nemá žádné inflexní body.

Stacionární body funkce Funkce f má dva stacionární body $s_1 = 1$, $s_2 = 5$.

Lokální extrémy funkce a inflexní body Z výše uvedeného je jasné (monotonie na okolí bodů), že s_1 je bodem lokálního maxima a s_2 je bodem lokálního minima.

Asymptoty funkce v krajních bodech definičního oboru Z počítání jednostranných limit vydíme, že v bodě -1 máme asymptotu bez směrnice - tj. přímku $x = -1$ kolmou an osu x.
Co se týče asymptot se směrnicí, je zapotřebí vyšetřit obě nekonečna. Nejprve tedy spočtěme pro naší asymptotu u $+\infty$ směrnici k_1. Pokud existuje, víme, že je vyjádřena následující limitou a tedy jejím spočtením níže dostáváme, že asymptota v $+\infty$ existuje a má směrnici 1.
$k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+4}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2)(1-5/x+4/x^2}{x^2(1+1/x)} = \frac{1-0+0}{1+0} = 1$.
Všimněme si, že pokud bychom počítali směrnici k_2 asymptoty v $-\infty$, pak použijeme stejnou formulku $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x$. Na výpočet této limity lze použít úplně stejný postup a dostaneme úplně stejný výsledek. Tudíž existuje i asymptota v $-\infty$ a ta má směrnici $k_2 = 1$.
Pokud budeme chtít dopočíst absolutní členy obou směrnici - označme je q_1 a q_2 - musíme použít vzoreček $q = \lim\limits_{x\to\pm} f(x) - kx$. Můžeme tedy počítat:
$q_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+4}{x+1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+4-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6x+4}{x+1} = -6$.
$q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+4}{x+1} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+4-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x+4}{x+1} = -6$.
Dohromady tedy má funkce dvě asymptoty (v $+\infty$ a v $-\infty$), které splývají a mají rovnici $y = x-6$.

Funkce více proměnných

- podobnost s jednou proměnnou;
- rozdíly oproti jedné proměnné;
- obrázky;
- parciální funkce, parciální derivace.

Příklady U následujících funkcí spočtěte parciální derivace a nalezněte stacionární body.

1 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x - 5$;

2 $f(x, y) = 5(x - y)(x^2 + 3y)$;

3 $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

4 $f(x, y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$;