11. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Opakování z přednášky

- Funkce dvou proměnných - obrázky;
- Funkce dvou proměnných na množině;
- Parciální derivace, Jaccobián, tečná rovina - obrázky;
- Množiny (hranice, vnitřek, kompaktní množina), implicitně zadané množiny a jejich vazby;
- Rovnice přímky (normálová), oaramterické zadání úsečky pomocí dvou bodů;
- Extrémy funkce na kompaktní množině
  - existence

Krok 1 Rozdělíme množinu M na hranici a vnitřek;

Krok 2 Určíme body B, pro které $\partial_x f(B) = \partial_y f(B) = \partial_z f(B) = 0$ a ke kandidátům na extrém přidáme všechny takové ***ve vnitřku množiny*** M;

Krok 3 ROzdělíme hranici množiny na vrcholy (body, dimenze 0), hrany (úsečky nebo křivky, dimenze 1) a stěny (plochy, dimenze 2 - pouze pokud $f = f(x, y, z)$);

Krok 4 Každá část hranice se musí v principu prověřit - tedy provést nějaký úkon, který nám řekne, zda se na hranici nachází nějaký kandidát na extrém funkce;

Krok 5 Dostaneme (snad) pouze několik kandidátů na extrémy. Porovnáním vybereme minimum a maximum funkce f na množině M.

Takže zbývá jen rozpracovat **Krok 4** - jinak vše umíme. My se naučíme používat tři metody:

- **Dosazovací metoda** - nejlehčí z metod a zároveň nejvíce specifická. Máme-li hranici množiny zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$, můžeme se pokusit *vyjádřit z této rovnice jednu z proměnných, dosadit ji do předpisu funkce a hledat posléze extréme této nové funkce na příslušně upravené množině*. Všechny takové extrémy přidáme do seznamu kandidátů na extrémy funkce f na množině M;
- **Metoda Jaccobiánu pro** $f(x, y)$ - metoda pro funkce dvou proměnných - máme-li hranici množiny zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$, pak tato metoda je založená na řešení následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) \cdot \partial_y g(x, y) - \partial_y f(x, y) \cdot \partial_x g(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

  Všechna řešení rovnice výše přidáme do seznamu kandidátů extrémů funkce f v množině M;

– **Metoda Lagrangeových multiplikátorů** - metoda pro funkce více proměnných (pro ná dvou nebo tří). Uvažujeme hranici množiny zadanou implicitně pomocí až dvou rovnic $g_1(x,y)=0, g_2(x,y)=0$ (my potkáme jen příklady kdy $N=1$ nebo $N=2$, protože tři vazby už i v $\mathbb{R}^3$ určují jediný bod a tedy ho rovnou můžeme zařadit na seznam kandidátů a nemusíme se trápit s výpočty). Tato metoda je založená na tzv. ***Lagrangeově funkci*** $\mathcal{L}$. Ta závisí na všech proměnných funkce f (tedy na x, y a případně z) a zároveň každá z vazeb g_i přidává této funkce $\mathcal{L}$ jednu novou proměnnou λ_i - tzv. ***Lagrangeův multiplikátor***. Tato funkce $\mathcal{L}$ má vždy stejný tvar:

Pro dvě proměnné: $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

Pro tři proměnné: $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z)$

Vidímě, že definice není příliš složitá. Všimněme si, toho, že ačkoliv píšeme $g_i(x,y,z)$ tak funkce určující vazby nemusí nutně záviset na všech proměnných. Zároveň můžeme mít pouze jednu vazebnou rovnici. Pak tentopřípad lze zahrnout do definice výše jako speciální případ $g_2 \equiv 0$. Nebo-li máme-li jen jednu vazbu, automaticky přecházíme k $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$.

To co nám metoda Lagrangeových multiplikátorů říká, je, že stačí zahrnout do seznamu kandidátů pouze body, které řeší soustavu rovnic

Pro dvě proměnné

$$\partial_x \mathcal{L}(x,y,\lambda)=0$$
$$\partial_y \mathcal{L}(x,y,\lambda)=0$$
$$\partial_\lambda \mathcal{L}(x,y,\lambda)=0$$

Pro tři proměnné

$$\partial_x \mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$$
$$\partial_y \mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$$
$$\partial_z \mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$$
$$\partial_{\lambda_1} \mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$$
$$\partial_{\lambda_2} \mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$$

Tím myslíme, body (x,y) (nebo (x,y,z)), pro které najdeme Lagrangeovy multiplikátory λ (nebo λ_1, λ_2), tak že v odpovídajícím bodě jsou všechny rovnice daného případu splněny.

Příklady Co se příkladů týče, tak vás opět musím odkázat na stránkypřednášejícího - Úkol 17 a Úkol 18. Je to opět z důvodu, že vymyslet příklad tohoto typu, který *rozumně vyjde* není jednoduché (alespoň pro mě ne), narozdíl od například o příkladů na limity, asymptoty, kvadratické rovnice apod. Sem dám pouze jeden nebo dva typové příklady, abyste viděli tu abstrakci v úvodu v praxi. Co se samostudia týče - doporučuji sérii z cyklu Khan Academy věnované právě metodě Lagrangeových multiplikátorů.

Dosazovací metoda Najděte extrémy funkce f na úsečce AB pro

$$f(x,y)=x^2-4x+2y^2+3y \quad A=[0;2]\ B=[4;0]. \tag{1}$$

$$f(x,y)=x^2+3x+2y^2+4y \quad A=[-4;-1]\ B=[2;2]. \tag{2}$$

Řešení 1 Nejprve si parametricky vyjádříme danou úsečku a dostaneme

$$AB \, : \, \{At + (1-t)B \,|\, t \in \langle 0;1 \rangle\} \equiv \{x = 4 - 4t \, , \, y = 2t \,|\, t \in \langle 0;1 \rangle\} \, .$$

Máme-li toto vyjádření, uvědomíme si, že nás naše funkce zajímá *pouze na úsečce* AB a tedy pouze pro body z množiny výše a tedy můžeme do f za x a y dosadit vyjádření výše a přejít k neznámé $t \in \langle 0;1 \rangle$. Tím dostaneme funkci pouze jedné proměnné tvaru

$$\begin{aligned} f\left(x(t), y(t)\right) \equiv g(t) = (4-4t)^2 - 4(4-4t) + 2(2t)^2 + 3(2t) = \\ = 16 - 32t + 16t^2 - 16 + 16t + 8t^2 + 6t = 24t^2 - 10t = 2t(12t - 5). \end{aligned}$$

Vidíme, že toto je parabola (kvadratická funkce), která je konvexní a tedy má jedno globální minimum a to ve vrcholu, který je přesně uprostřed mezi kořeny dané paraboly. Pokud tento vrchol ležív intervalu $\langle 0;1 \rangle$, bude to nutně i minimum naší funkce g. Kořeny vidíme rovnou - 0 a 5/12. Minimum f na přímce AB je tedy v bodě odpovídající $t = 5/24$. Abychom zjistili souřadnice tohoto bodu, musíme dosadit naše $t = 5/24$ do vztahů pro x a y a dostaneme bod o souřadnicích $x = 4 - 5/6 = 19/6$ a $y = 5/12$.
Co se týče maxima, musí ho být nabyto v jednom z krajních bodů intervalu - ty odpovídají $t = 0$ nebo $t = 1$. Porovnáme-li hodnoty $g(0) = f(x_B, y_B)$ a $g(1) = f(x_A, y_A)$

$$g(0) = 0 \quad g(1) = 40 - 26 = 14,$$

získáme, že $g(1) > g(0)$ a tedy v bodě odpovídajícímu $t = 1$ (tj. v bodě A) má funkce f globální maximum.
U této funkce jsme si trochu zejdnodušili život díky znalostem kvadratických funkcí. V příkladech se složitejším zadáním můžeme ale vždy použít nástroje z průběhu funkce a maxima a minima uvnitř intervalu vyhledat pomocí první derivace a monotonie funkce a následně je vždy ještě porovnat s krajními body. Doporučuji si dávat vždy velký pozor na to, abyste nezapoměnli, že naše "nová"funkce g je ***pouze na intervalu*** $\langle 0;1 \rangle$! Pokud najdeme etrémy g mimo tento interval, tak jsme našli extrémy f mimo úsečku AB (ale někde na přímce zadané touto úsečkou). Ty nás nezajímají.