12. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Opakování z přednášky

- Funkce dvou proměnných - obrázky;
- Funkce dvou proměnných na množině;
- Parciální derivace, Jaccobián;
- Množiny (hranice, vnitřek, kompaktní množina), implicitně zadané množiny a jejich vazby;
- Rovnice přímky (normálová), oaramterické zadání úsečky pomocí dvou bodů;
- Extrémy funkce na kompaktní množině
  - existence

Krok 1 Rozdělíme množinu M na hranici a vnitřek;

Krok 2 Určíme body B, pro které $\partial_x f(B) = \partial_y f(B) = \partial_z f(B) = 0$ a ke kandidátům na extrém přidáme všechny takové ***ve vnitřku množiny*** M;

Krok 3 ROzdělíme hranici množiny na vrcholy (body, dimenze 0), hrany (úsečky nebo křivky, dimenze 1) a stěny (plochy, dimenze 2 - pouze pokud $f = f(x, y, z)$);

Krok 4 Každá část hranice se musí v principu prověřit - tedy provést nějaký úkon, který nám řekne, zda se na hranici nachází nějaký kandidát na extrém funkce;

Krok 5 Dostaneme (snad) pouze několik kandidátů na extrémy. Porovnáním vybereme minimum a maximum funkce f na množině M.

Takže zbývá jen rozpracovat **Krok 4** - jinak vše umíme. My se naučíme používat tři metody:

- **Dosazovací metoda** - nejlehčí z metod a zároveň nejvíce specifická. Máme-li hranici množiny zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$, můžeme se pokusit *vyjádřit z této rovnice jednu z proměnných, dosadit ji do předpisu funkce a hledat posléze extréme této nové funkce na příslušně upravené množině*. Všechny takové extrémy přidáme do seznamu kandidátů na extrémy funkce f na množině M;
- **Metoda Jaccobiánu pro** $f(x, y)$ - metoda pro funkce dvou proměnných - máme-li hranici množiny zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$, pak tato metoda je založená na řešení následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) \cdot \partial_y g(x, y) - \partial_y f(x, y) \cdot \partial_x g(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

  Všechna řešení rovnice výše přidáme do seznamu kandidátů extrémů funkce f v množině M;

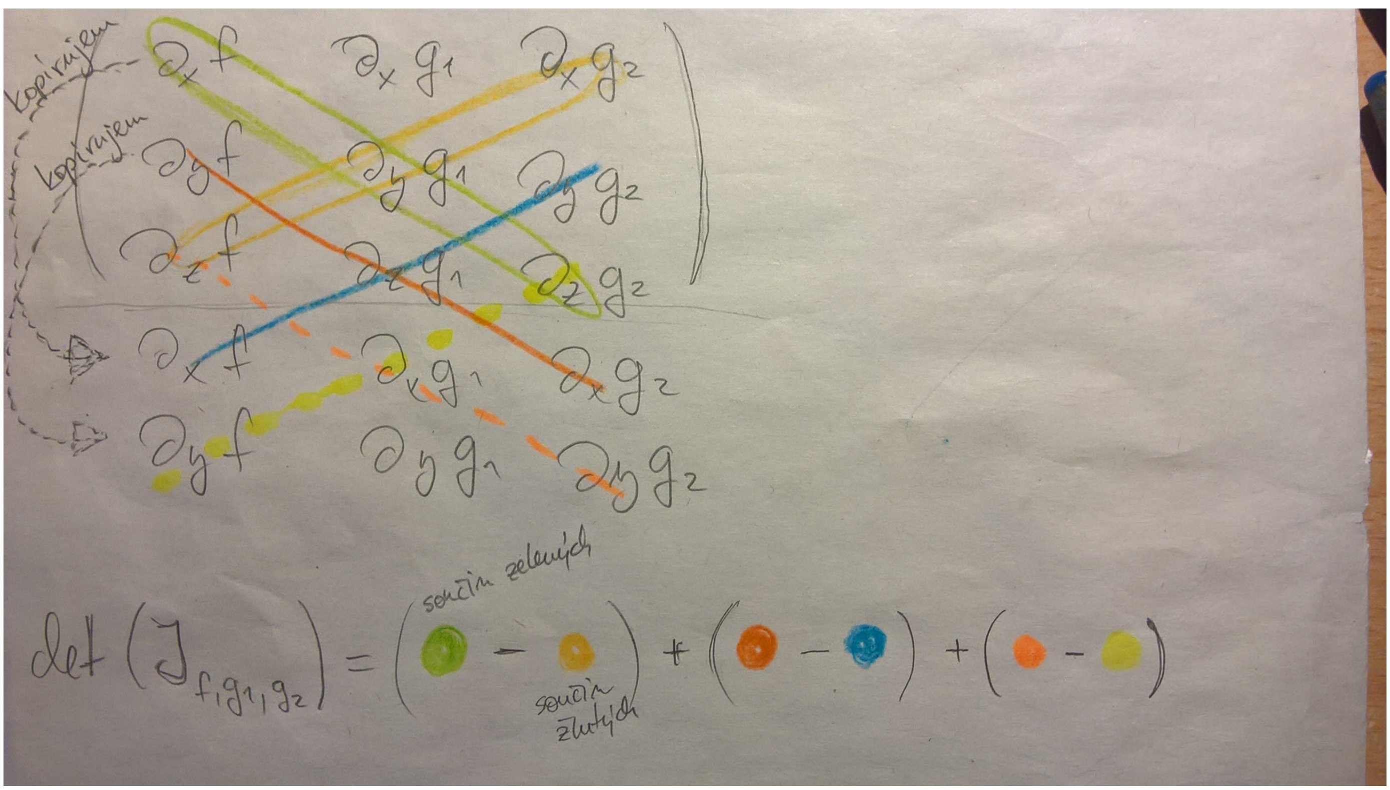
– **Metoda Jaccobiánu pro** $f(x,y,z)$ - metoda pro funkce tří proměnných - máme-li hranici množiny zadanou implicitně rovnicemi $g_1(x,y,z)=0$, $g_2(x,y,z)=0$ pak tato metoda je založená na řešení následující speciální soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\det(J_{f,g_1,g_2}(x,y,z) &= 0\\ g_1(x,y,z) &= 0\\ g_2(x,y,z) &= 0.\end{aligned}$$

Druhá a třetí rovnice jsou jasné, jednoduše se chceme udržet na hranici. První rovnici je zapotřebí vysvětlit - konkrétně souhrn písmenek $\det(J_{f,g_1,g_2}(x,y,z)$. Vztahuje se k součinu parciálních derivací funkcí f, g_1 a g_2. Formálně je tento symbol definován jako

$$\begin{aligned}\det\left(J_{f,g_1,g_2}(x,y,z)\right) = &\left(\partial_x f\cdot\partial_y g_1\cdot\partial_z g_2 - \partial_z f\cdot\partial_y g_1\cdot\partial_x g_2\right)+\\ &+\left(\partial_y f\cdot\partial_z g_1\cdot\partial_x g_2 - \partial_y g_2\cdot\partial_z g_1\cdot\partial_x f\right)+\\ &+\left(\partial_z f\cdot\partial_x g_1\cdot\partial_y g_2 - \partial_z g_2\cdot\partial_x g_1\cdot\partial_y f\right).\end{aligned}$$

Evidentně je výraz výše zcela nezapamatovatelný. Naštěstí si ho lze snadno zapamatovat přes následující odvození.



Všechna řešení této ***soustavy*** rovnic výše přidáme do seznamu kandidátů extrémů funkce f v množině M;

– **Metoda Lagrangeových multiplikátorů** - metoda pro funkce více proměnných (pro ná dvou nebo tří). Uvažujeme hranici množiny zadanou implicitně pomocí až dvou rovnic $g_1(x,y)=0, g_2(x,y)=0$ (my potkáme jen příklady kdy $N=1$ nebo $N=2$, protože tři vazby už i v $\mathbb{R}^3$ určují jediný bod a tedy ho rovnou můžeme zařadit na seznam kandidátů a nemusíme se trápit s výpočty). Tato metoda je založená na tzv. ***Lagrangeově funkci*** $\mathcal{L}$. Ta závisí na všech proměnných funkce f (tedy na x, y a případně z) a zároveň každá z vazeb g_i přidává této funkce $\mathcal{L}$ jednu novou proměnnou λ_i - tzv. ***Lagrangeův multiplikátor***. Tato funkce $\mathcal{L}$ má vždy stejný tvar:

Pro dvě proměnné: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Pro tři proměnné: $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$

Vidímě, že definice není příliš složitá. Všimněme si, toho, že ačkoliv píšeme $g_i(x, y, z)$ tak funkce určující vazby nemusí nutně záviset na všech proměnných. Zároveň můžeme mít pouze jednu vazebnou rovnici. Pak tentopřípad lze zahrnout do definice výše jako speciální případ $g_2 \equiv 0$. Nebo-li máme-li jen jednu vazbu, automaticky přecházíme k $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.
To co nám metoda Lagrangeových multiplikátorů říká, je, že stačí zahrnout do seznamu kandidátů pouze body, které řeší soustavu rovnic

Pro dvě proměnné

$$\partial_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\partial_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

Pro tři proměnné

$$\partial_x \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\partial_y \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\partial_z \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\partial_{\lambda_1} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$
$$\partial_{\lambda_2} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

Tím myslíme, body (x, y) (nebo (x, y, z)), pro které najdeme Lagrangeovy multiplikátory λ (nebo λ_1, λ_2), tak že v odpovídajícím bodě jsou všechny rovnice daného případu splněny.

Příklady Co se příkladů týče, tak vás opět musím odkázat na stránkypřednášejícího - Úkol 19 až Úkol 21. Je to opět z důvodu, že vymyslet příklad tohoto typu, který *rozumně vyjde* není jednoduché (alespoň pro mě ne), narozdíl od například příkladů na limity, asymptoty, kvadratické rovnice apod. Sem dám pouze jeden nebo dva typové příklady, abyste viděli tu abstrakci z úvodu v praxi. Co se samostudia týče - doporučuji sérii z cyklu Khan Academy věnované právě metodě Lagrangeových multiplikátorů.

Příklad 5, Úkol 19

Pro zadanou funkce f a množinu M určete extrémy f na M.

$$f(x, y) = 3x - y + 1 \quad M \text{ je kruh se středem v počátku a poloměrem } \sqrt{10}.$$

Řešení vnitřku Nejprve vyšetříme existenci kandidátů uvnitř dané množiny a množinu nakreslíme. Co se kreslení týče, to by neměl být ze zadání problém - $\sqrt{10}$ odhadneme jako o něco *málo* víc než 3 (protože $\sqrt{9} = 3$). Zároveň však musíme mít *analytické* vyjádření této množiny. Tedy musíme vědět, že takovýto kruh se dá zapsat jako

$$M = \left\{ [x, y] \mid x^2 + y^2 \leq \underbrace{10}_{=\sqrt{10}^2} \right\}.$$

To je důležité pro ověřování, zda nějaký bod $B = [\alpha, \beta]$ leží v této množině. To se pozná tak, že zkusíme dosadit $[\alpha, \beta]$ za $[x, y]$ v M. Pokud pak spočtená nerovnost platí, bod B je v množině M. Navíc tento bod bude na hranici M, pokud bude platit přímo rovnost a bude uvnitř množiny M, pokud bude platit ostrá nerovnost. Pokud daná nerovnost neplatí, pak tento bod není uvnitř množiny M. Například bod $[2; 1]$ patří do této množiny a navíc je vnitřním bodem, protože $2^2+1^2 < 10$. Bod $[1; 3]$ patří do množiny a je na hranici, protože $3^2 + 1^2 = 10$ a bod $[-3; 2]$ nepatří do naší množiny M protože $(-3)^2 + 2^2 > 10$.
Budeme-li nyní hledat stacionární body funkce f, musíme nejprve spočíst parciální derivace. Snadno vidíme, že

$$\partial_x f(x, y) = 3 \quad \partial_y f(x, y) = -1$$

a tedy neexistuje žádný stacionární bod v celém definičním oboru a tím spíš ani v naší množině M. Zbývá tedy hledat extrémy na hranici - tzv. vázané extrémy. Ještě než k tomu přistoupíme, určíme tzv. *vazebnou funkci* $g(x, y)$. Tato funkce je vždy taková (je definována tak), že popisuje hranici množiny M - ve smyslu

$$\text{hranice } M = \{[x, y] \mid g(x, y) = 0\}.$$

V našem případě je tato funkce zjevně tvaru $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10$.

Řešení vázaných extrémů metodou Jakobiánu Máme hledat body, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) \cdot \partial_y g(x, y) - \partial_y f(x, y) \cdot \partial_x g(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Parciální derivac funkce f již máme spočtené a je tedy zapotřebí spočíst paricální derivace g:

$$\partial_x g(x, y) = 2x \quad \partial_y g(x, y) = 2y.$$

Po dosazení do obecného tvaru dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2y - (-1) \cdot 2x = 0 \\ x^2 + y^2 = 10, \end{aligned}$$

kterou lze snadno řešit vyjádřením z první rovnice a dosazením do druhé. Pokud vyjádříme $x = -3y$ a dosadíme, dostaneme kvadratickou rovnici

$$9y^2 + y^2 = 10,$$

která má zjevně právě dvě řešení $y_1 = -1$ (a tedy $x_1 = 3$) a $y_2 = 1$ (a tedy $x_2 = -3$). Z celé hranice máme tedy dva kandidáty na extrém a to body $[-1; 3]$ a $[1; -3]$.

Protože na vnitřku celé množiny není žádný stacionární bod, má celá funkce na M pouze dva kandidáty na extrémy a tedy jeden t nich musí být maximum a druhý minimum. Pokud funkci vyčíslíme, dostaneme

$$f(-3,1) = 3(-3) - 1 + 1 = -9 \quad f(3,-1) = 3 \cdot 3 - (-1) + 1 = 11$$

a tedy $[-3,1]$ je minimem f na M a $[3,-1]$ je maximem f na M.

Řešení vázaných extrémů metodou Lagrangeových multiplikátorů Zadefinujeme si lagrangeovu funkci jak to bylo uvedeno výše, tedy

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 3x - y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Dále si spočítáme parciální derivace $\mathcal{L}$ podle všech proměnných a sestavíme příslušnou soustavu rovnic

$$\underbrace{3 + 2\lambda x}_{\partial_x \mathcal{L}(x,y,\lambda)} = 0$$

$$\underbrace{-1 + 2\lambda y}_{\partial_y \mathcal{L}(x,y,\lambda)} = 0$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 10}_{\partial_\lambda \mathcal{L}(x,y,\lambda)} = 0.$$

Všechna řešení této soustavy jsou kandidáti (v našem případě jediní, protože nemáme žádné stacionární body uvnitř M) na extrémy f na M. Soustavu vyřešíme vyjádřením x z první rovnice ($x = -3/(2\lambda)$), y ze druhé ($y = 1/(2\lambda)$) a dosazením do poslední rovnice. To jde provést pouze pokud $\lambda \neq 0$. Ovšem rovnou vidíme, že pokud $\lambda = 0$, pak ani první ani druhá rovnice nejsou nikdy splněny, takže nutně $\lambda \neq 0$ (protože my víme, že nějací kandidáti existovat musí - spojitá funkce má an kompaktní množině extrémy). Uvedeným psotupem získáme rovnici pro λ tvaru

$$\left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 10.$$

Vynásobením celé rovnice λ^2 získáme kvadratickou rovnici pro λ tvaru

$$9 + 1 = 40\lambda^2$$

a tedy dostáváme dvě řešení - $\lambda_1 = -1/2$ a $\lambda_2 = 1/2$. Po zpětném dodsazení do vztahů $x = -3/(2\lambda)$ a $y = 1/(2\lambda)$ dostaneme stejná řešení jako výše v metodě jakobiánu.

Porovnání

Obecně nelze říci, která metoda bude snazší, ale většinou platí, že metoda jakobiánu dává u jednoduchých příkladů snazší soustavy rovnic. Naopak u složitějších případů dáva soustavy jen těžko řešitelné, na které je zapotřebí často znát nějaký další trik. Co se týče matody lagrangeových

multiplikátorů, vždy lze postupovat jako výše - vyjádřit prostorové neznámé (x,y a případně z) pomocí λ a řešíme následně orvnici pro λ. Navíc u metody Jakobiánu ***je velmi snadné poplést znaménko, což pak úplně zkazí celý výsledek, přestože budete počítat správně***. Metoda lagrangeových multiplikátorů je lépe zapametovatelné.
Obecně bych řekl - pokud v parciálních derivacích f je nejvýše lineární člen a zároveň se nevyskytuje smíšený člen xy, použijte metodu jakobiánu. Jinak metodu lagrangeových multiplikátorů. Pokud vám vyjde ošklivá soustava, před počítáním doporučuji si zkusit napsat druhou variantu a zamyslet se na chvilku nad tím, zda by druhá varianta nebyla snazší. Alternativa je spočíst vždy vše pouze akrze lagrangeovy multiplikátory s tím, že občas si malinko přiděláte práci, ale nemusíte řešit více vzorečků apod.

Příklad 5.B, Úkol 21

Pro zadanou funkce f a množinu M určete extrémy f na M.

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4 \quad M = \left\{[x,y,z] \,|\, (x-1)^2 + y^2 = 13 \;\&\; 3x + 2y - z + 12 = 0\right\}.$$

Řešení metodou Lagrangeových multiplikátorů Podle návodů výše bychom nejprve měli určit stacionární body f ***uvnitř*** M. Ale, když se pozorněji podíváme, vidíme, že kdybychom našli nějaké stacionární body a chtěli ověřit, zda jsou *uvnitř* M, nevěděli bychom jak to udělat, protože M je zadána pomocí dvou rovností a žádné nerovnosti (a my víme, že rovnosti odpovídají hranicím nikoliv vnitřku). To je proto, že naše množina M v $\mathbb{R}^3$ je 1D - je to přibližně řečeno kruh protnutý s přímkou (první rovnice je rovnice kruhu a druhá rovnice je rovnice přímky). Tedy tato množina *nemá žádný vnitřek* - je to úsečka (nebo bod nebo prázdná množina - ale to by byl zadávající hodně podlý). Nicméně, pro nás to znamená, že můžeme rovnou přijít k sestavování lagrangeovy funkce pro dvě vazebné funkce $g_1(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 13$ a $g_2(x,y,z) = 3x + 2y - z + 12$:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4 + \lambda_1\left((x-1)^2 + y^2 - 13\right) + \lambda_2(3x + 2y - z + 12).$$

Rovnou tedy můžeme psát naši soustavu rovnic:

$$\underbrace{2x-2+\lambda_1 2(x-1)+3\lambda_2}_{=\partial_x\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}=0$$

$$\underbrace{2y+\lambda_1 2y+2\lambda_2}_{=\partial_y\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}=0$$

$$\underbrace{2z-\lambda_2}_{=\partial_z\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}=0$$

$$\underbrace{(x-1)^2+y^2-13}_{\partial_{\lambda_1}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}=0$$

$$\underbrace{3x+2y-z+12}_{\partial_{\lambda_2}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}=0.$$

Tu bychom mohli řešit jako dříve - postup je uveden níže. Ovšem chytřejší by bylo dosadit třetí rovnici do páté a následně řešit pouze čtyři rovnice o čteřech neznámých. Trochu práce bychom si tím ušetřili (ale ne zas tolik). To je klasický rys těchto úloh - výsledná soustava je většinou nějakým “trikem”zjednodušitelná - vyplatí se tedy nejprve se zamyslet než člověk najede na kuchařkovitý přístup. Nicméně i ten nakonec vede k cíli, jen je o trochu pracnější. Níže uvádím ten šablonovitý postup, ať máte někde ten jednotný základ.
Soustavu tedy budeme řešit podobně jako dříve - z prvních tří rovnic vyjádříme proměnné x, y a z pomocí λ_2 a λ_2 a dosadíme do posledních dvou rovnic, které pak budeme řešit pro λ_1 a λ_2. Vyjádření

- $2x+2\lambda_1 x=2+2\lambda_1-3\lambda_2$ a tedy $x=\frac{2+2\lambda_1-3\lambda_2}{2+2\lambda_1}$;
- $2y+\lambda_1 2y=-2\lambda_2$ a tedy $y=\frac{-2\lambda_2}{2+2\lambda_1}$;
- $z=\lambda_2/2$.

Úpravy výše jsou v pořádku pouze pokud $\lambda_1\neq -1$ (pokud jsme nedělili nulou). Ovšem pokud by náhodou $\lambda_1\neq -1$, pak nutně z druhé rovnice plyne, že $\lambda_2=0$ a tedy $z=0$ (třetí rovnice). První rovnice je automaticky splněna a ze čtvrté a páté rovnice dopočítáme x a y. Konkrétně dostaneme

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2-13&=0\\ 3x/2+12&=-y\end{aligned}$$

a dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$\begin{aligned}x^2-2x+1+9x^2/4+36x+144-13&=0\\ 13x^2/4+34x+132&=0\\ D=34^2-13\cdot 132&<0\end{aligned}$$

a tedy dostáváme, že takové x neexistuje. Tedy nemůže nastat případ $\lambda_1 = -1$ a ted jsme tímto členem mohli dělit.

Po dosazení do posleních dvou rovnic získáme soustavu

$$\left(\frac{2+2\lambda_1-3\lambda_2}{2+2\lambda_1}-1\right)^2+\left(\frac{-2\lambda_2}{2+2\lambda_1}\right)^2-13=0$$
$$3\frac{2+2\lambda_1-3\lambda_2}{2+2\lambda_1}+2\frac{-2\lambda_2}{2+2\lambda_1}-\lambda_2/2+12=0$$

a tuto soustavu můžeme upravovat dále

$$\left(\frac{2+2\lambda_1-3\lambda_2-2-2\lambda_1}{2+2\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{-2\lambda_2}{2+2\lambda_1}\right)^2-13=0$$
$$\frac{6+6\lambda_1-9\lambda_2}{2+2\lambda_1}+\frac{-4\lambda_2}{2+2\lambda_1}-\lambda_2/2+12=0$$

a tedy

$$\frac{9\lambda_2^2}{(2+2\lambda_1)^2}+\frac{4\lambda_2^2}{(2+2\lambda_1)^2}-13=0$$
$$\frac{6+6\lambda_1-13\lambda_2}{2+2\lambda_1}-\lambda_2/2+12=0$$

a tedy

$$13\lambda_2^2-13(2+2\lambda_1)^2=0$$
$$\frac{-13\lambda_2}{2+2\lambda_1}-\lambda_2/2+15=0.$$

Z první rovnice vidíme, že $\lambda_2 = \pm(2+2\lambda_1)$ a tedy dosazením získáme dvě nezávislé rovnice pro λ_1(jednu pro znaménko + a druhou pro -), které nám dají řešení λ_1^A a λ_1^B. K těmto pak dopočteme zbylé neznámé a získáme body $A = [x^A, y^A, z^A]$ a $B = [x^B, y^B, z^B]$ jako kandidáty na extrémy.

(+) $\frac{-13(2+2\lambda_1)}{2+2\lambda_1} - (2+2\lambda_1)/2 + 15 = 0$ což lze snadno upravit do tvaru $-13-1-\lambda_1+15 = 0$ a tedy $\lambda_1^A = 1$. Tudíž lze zpětně dopočíst, že $\lambda_2^A = 4$, $z^A = 2$, $y^A = -2$ a $x^A = -2$.

(-) $\frac{13(2+2\lambda_1)}{2+2\lambda_1} - (-1)(2+2\lambda_1)/2 + 15 = 0$ což lze snadno upravit do tvaru $13+1+\lambda_1+15 = 0$ a tedy $\lambda_1^B = -29$. Tudíž lze zpětně dopočíst, že $\lambda_2^B = 60$, $z^B = 28$, $y^B = 2$ a $x^B = 4$.

Dosazením do předpisu funkce dostaneme, že A je minimum a B maximum.

Řešení metodou Jakobiánu Pouze pro připomenutí - $g_1(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 13$ a $g_2(x,y,z) = 3x + 2y - z + 12$ pro naší funkci $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4$. Stačí tedy sestavit soustavu.

(R1)

$$\begin{aligned}(\partial_x f\cdot\partial_y g_1\cdot\partial_z g_2-\partial_z f\cdot\partial_y g_1\cdot\partial_x g_2)&+\\+(\partial_y f\cdot\partial_z g_1\cdot\partial_x g_2-\partial_y g_2\cdot\partial_z g_1\cdot\partial_x f)&+\\+(\partial_z f\cdot\partial_x g_1\cdot\partial_y g_2-\partial_z g_2\cdot\partial_x g_1\cdot\partial_y f)&=0\end{aligned}$$

(R1) $(2x \cdot 2y \cdot (-1) - 3 \cdot 2y \cdot 2z) + (2y \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot (2x-2)) + (2z \cdot 2(x-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2(x-1) \cdot 2y) = 0$

($\mathrm{R1}_{\mathrm{uprav.}}$) $(2x \cdot 2y \cdot (-1) - 3 \cdot 2y \cdot 2z) + (2z \cdot 2(x-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2(x-1) \cdot 2y) = 0$

($\mathrm{R1}_{\mathrm{uprav.1}}$) $-4xy - 12zy + 8zx - 8z + 4xy - 4y = 0$

($\mathrm{R1}_{\mathrm{uprav.1}}$) $-12zy + 8zx - 8z - 4y = 0$

(R2) $(x-1)^2 + y^2 - 13 = 0$

(R3) $3x + 2y - z + 12 = 0$

Příklady pro zvídavé

Vyšetřete extrémy dané funkce $f(x,y)$ na množině zadané implicitně rovnicí $g(x,y) = 0$.

- $f(x,y) = 5x - 2y + 3$ a $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 164$;