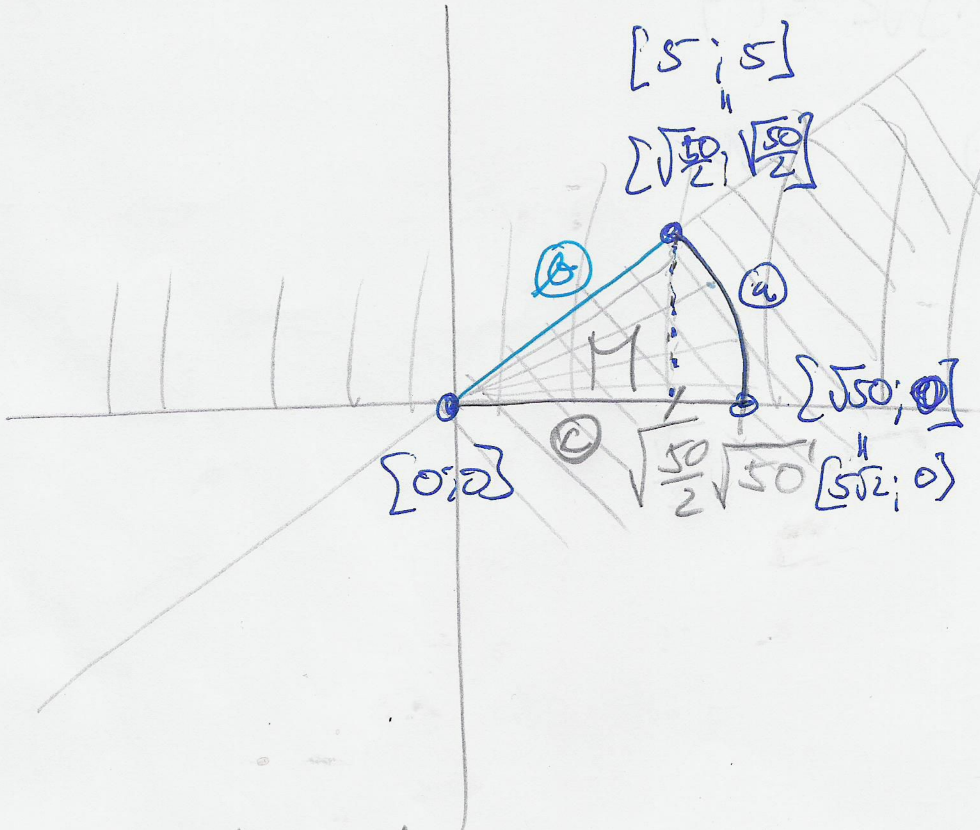
Př $f(x,y) = 7x + y$

$$M = \{[x,y] : x^2+y^2 \le 50,\ y \ge 0,\ x \ge y\}$$



Kde se vazby protínají

$$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2 = 50 \end{cases}$$

$2y^2 = 50$

$y = \pm\sqrt{\frac{50}{2}} =$

$= \pm\sqrt{25} = \pm 5$

(A) kandidáti uvnitř M

f lineární ⇒ f nemá stac. body ⇒ nejsou kandidáti uvnitř M

(B) kandidáti na hranici M

(a) vazba $x^2 + y^2 = 50$ Jacobiho matice

$g = x^2 + y^2 - 50$

$\partial_x f = 7 \quad \partial_x g = 2x$

$\partial_y f = 1 \quad \partial_y g = 2y$

$$\partial_x f\, \partial_y g - \partial_y f\, \partial_x g = 0$$

$y = 0$

$7 \cdot \cancel{2}y - \cancel{2}x = 0 \Rightarrow x = 7y$

$x^2 + y^2 - 50 = 0$

$50y^2 = 50 \quad y = \pm 1 \quad x = \pm 7$

[7;1] je kandidát, ostatní body neleží na hranici M

b) vazba $y = x$

f lineární, lineární vazba $\Rightarrow$ nejsou kandidáti

c) vazba $y = 0$ stejné

d) VRCHOLY

SEZNAM KANDIDÁTŮ

$f(7;1) = 50$ MAX

$f(5;5) = 7 \cdot 5 + 5 = 40$

$f(\sqrt{50};0) = 7 \cdot 5\sqrt{2} \approx 49$

$f(0;0) = 0$ MIN

Př

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y$$

$$M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x^2-4\}$$

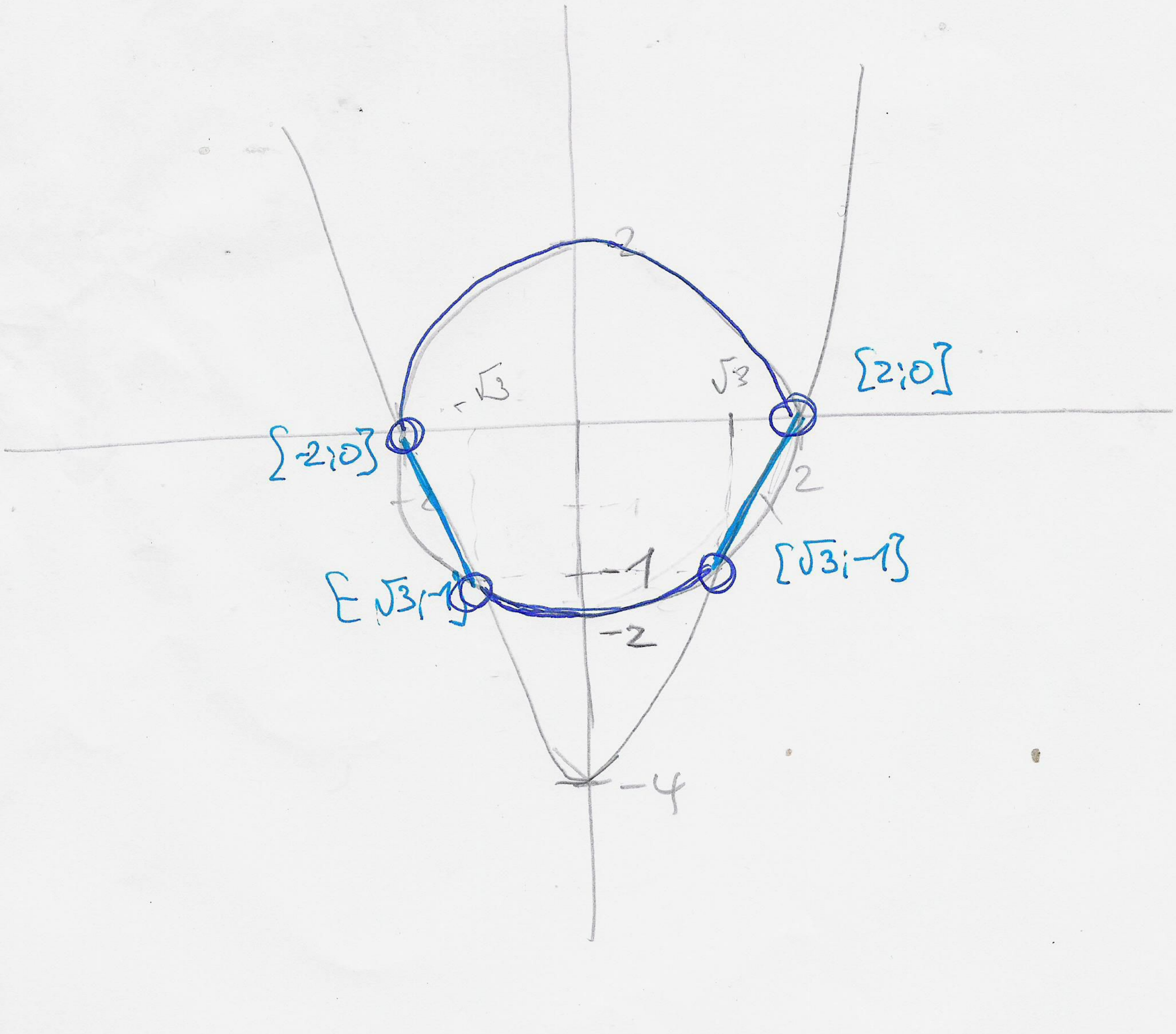
Protínají se vrchy?

$$\boxed{\begin{matrix} y = x^2-4 \\ x^2+y^2=4 \end{matrix}} \to x^2 = y+4$$

$$y^2 + y \cancel{+4} = \cancel{4}$$

$y = 0 \quad y = -1$

$x = \pm 2 \quad x = \pm\sqrt{3}$



(A) kandidáti uvnitř M

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \quad x = 0 \\ \partial_y f &= \quad 1 = 0 \end{aligned} \;\rightarrow\; \text{není nikdy splněno}$$

$\Rightarrow$ neexistuje stac. bod

$\Rightarrow$ žádní kandidáti

(B) kandidáti na hranici M

a) vazba $x^2+y^2=4$ Jacobiho metoda (lze použít i Lagrange multi)

$$g(x,y) = x^2+y^2-4$$

$$\partial_x g = 2x$$

$$\partial_y g = 2y$$

$$\partial_x f \, \partial_y g - \partial_y f \, \partial_x g = 0$$

$$g = 0$$

$$x\,2y - 2x = 0$$

$$x^2+y^2 = 4$$

$$x(2y-2) = 0$$

$\Rightarrow$ $x=0 \vee y=1$

$y = \pm 2$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{3}$

KANDIDÁTI $[0;2]$ $[0;-2]$ $[\sqrt{3};1]$ $[-\sqrt{3};1]$ všechny $\in M$

b) vazba $y = x^2-4$ dosazovací metoda

$$h(x) = f(x, x^2-4) = \tfrac{1}{2}x^2 + x^2 - 4 = \tfrac{3}{2}x^2 - 4$$

$$h'(x) = 3x$$

$x=0 \rightarrow y=-4$ .. $[0,-4] \notin M$

c) vrcholy jsou kandidáti automaticky

SEZNAM KANDIDÁTŮ:

$f(0;2) = 2$

$f(0;-2) = -2 \leftarrow$ MIN

$f(\sqrt{3};1) = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$ ⇐ MAX

$f(-\sqrt{3};1) = \frac{5}{2}$

$f(-2;0) = 2$

$f(2;0) = 2$

$f(-\sqrt{3};-1) = \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$

$f(\sqrt{3};-1) = \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$

Funkce f nabývá svých maxim na množině M v bodě $[\sqrt{3};1]$ a $[-\sqrt{3};1]$, hodnota maxima je $\frac{5}{2}$.

(" " " —||— " " " minima na " " M

" " $[0;-2]$ " " " " minima je -2.)

HLEDÁNÍ EXTRÉMŮ NA HRANICI MNOŽINY

A) funkce 2 proměnných (1 vazba)

- dosazovací metoda
  ↳ pokud mohu vyjádřit jednu proměnnou ($y = \ldots$, $x = \ldots$)

$\boxed{\text{CV12}}$

- Jacobiho metoda
- Lagrangeovy multiplikátory

B) funkce 3 proměnných

1) 1 vazba $g(x,y,z) = 0$

$\boxed{\text{CV13}}$

- Lagrangeovy multiplikátory

$$\begin{aligned} \partial_x f + \lambda \partial_x g &= 0 \\ \partial_y f + \lambda \partial_y g &= 0 \\ \partial_z f + \lambda \partial_z g &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

2) 2 vazby $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$

- Jacobiho metoda:

$$\partial_x f\, \partial_y g_1\, \partial_z g_2 + \partial_y f\, \partial_z g_1\, \partial_x g_2 + \partial_z f\, \partial_x g_1\, \partial_y g_2 - \partial_z f\, \partial_y g_1\, \partial_x g_2 - \partial_x f\, \partial_z g_1\, \partial_y g_2 - \partial_y f\, \partial_x g_1\, \partial_z g_2 = 0$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

- Lagrangeovy multiplikátory

$$\partial_x f + \lambda_1 \partial_x g_1 + \lambda_2 \partial_x g_2 = 0$$
$$\partial_y f + \lambda_1 \partial_y g_1 + \lambda_2 \partial_y g_2 = 0$$
$$\partial_z f + \lambda_1 \partial_z g_1 + \lambda_2 \partial_z g_2 = 0$$
$$g_1 = 0$$
$$g_2 = 0$$

λ_1, λ_2 neznámy

$\uparrow \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y^2$

$M = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 = 4\}$

Lagrangeovy multiplikátory: $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$

$$\begin{aligned} \partial_x f + \lambda \partial_x g &= 0 \\ \partial_y f + \lambda \partial_y g &= 0 \\ \partial_z f + \lambda \partial_z g &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

$\partial_x f = x^2$ $\quad \partial_x g = 2x$

$\partial_y f = 2y$ $\quad \partial_y g = 2y$

$\partial_z f = 0$ $\quad \partial_z g = 2z$

1) $x^2 + \lambda 2x = 0 \Rightarrow x(x+2\lambda) = 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \vee x = -2\lambda$

nebo

2) $\cancel{2}y + \lambda \cancel{2}y = 0$ $\rightarrow$ $y = 0 \vee \lambda = -1$

3) $+\lambda 2z = 0$ $\rightarrow$ $z = 0 \vee \lambda = 0$

4) $x^2+y^2+z^2-4 = 0$

I) $\lambda = 0 \Rightarrow x=0,\ y=0$ dosadíme do 4) : $z^2-4=0$

$z=\pm 2$

KANDIDÁTI $[0;0;\pm 2]$

II) $\lambda \neq 0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow$ řešíme soustavu

$x^2+y^2-4=0$

a podmínky $x=0 \vee x=-2\lambda$

$y=0 \vee \lambda=-1$

Rozbor možností:

α) $x=0 \wedge y=0 \Rightarrow -4=0$ NEMÁ SMYSL

β) $x=0 \wedge \lambda=-1 \Rightarrow y^2-4=0$

$y=\pm 2$

KANDIDÁTI $[0;\pm 2;0]$

γ) $x=-2\lambda \wedge y=0 \Rightarrow 4\lambda^2-4=0$

$\lambda=\pm 1$

$x=\mp 2$

KANDIDÁTI $[\mp 2;0;0]$

δ) $x=-2\lambda \wedge \lambda=-1 \Rightarrow x=2$

$4+y^2-4=0$

$y=0$

KANDIDÁT $[2;0;0]$

SEZNAM KANDIDÁTŮ

$f(2;0;0)=\frac{8}{3}$

$f(-2;0;0)=-\frac{8}{3}$ MIN

$f(0;0;\pm 2)=0$

$f(0;\pm 2;0)=4$ MAX

Pr $\quad f(x,y,z) = -x + 7y - z - 13$

$g_1 = y - x + z = 0$

$g_2 = x^2 + z^2 - 1 = 0$

Lagrangeovy multiplikátory:

$\nabla_x f + \lambda_1 \nabla_x g_1 + \lambda_2 \nabla_x g_2 = 0$

$\nabla_y f + \lambda_1 \nabla_y g_1 + \lambda_2 \nabla_y g_2 = 0$

$\nabla_z f + \lambda_1 \nabla_z g_1 + \lambda_2 \nabla_z g_2 = 0$

$g_1 = 0$

$g_2 = 0$

$\nabla_x f = -1$, $\nabla_y f = 7$, $\nabla_z f = -1$

$\nabla_x g_1 = -1$, $\nabla_y g_1 = 1$, $\nabla_z g_1 = 1$

$\nabla_x g_2 = 2x$, $\nabla_y g_2 = 0$, $\nabla_z g_2 = 2z$

1) $-1 + \lambda_1(-1) + \lambda_2(2x) = 0$

2) $7 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -7}$

3) $-1 + \lambda_1 + \lambda_2(2z) = 0$

α) $\lambda_2 \neq 0 \rightarrow x = \frac{-3}{\lambda_2}$, $z = \frac{4}{\lambda_2}$

$y - x + z = 0$

$x^2 + z^2 - 1 = 0$

$\downarrow$

$\frac{9}{\lambda_2^2} + \frac{16}{\lambda_2^2} - 1 = 0$

$\lambda_2^2 = 25$

$\lambda_2 = 5$ or $\lambda_2 = -5$

$\lambda_2 = 5 \rightarrow$ $x = -\frac{3}{5}$, $z = \frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{5}$

$\lambda_2 = -5 \rightarrow$ $x = \frac{3}{5}$, $z = -\frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

β) $\lambda_2 = 0$

$\overset{3)}{\Rightarrow} -1 - 7 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 \neq 0$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{49}{5} + \frac{4}{5} - 13 = -3 \quad \text{MAX}$$

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right) = +\frac{3}{5} - \frac{49}{5} - \frac{4}{5} - 13 = -23 \quad \text{MIN}$$