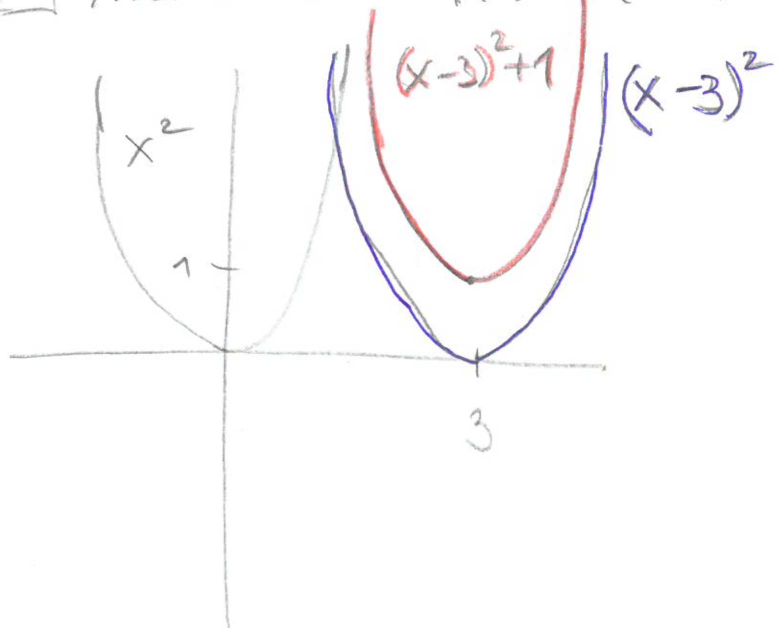
# I. Kvadratická funkce, parabola

Př 1 nakreslete $f(x) = (x-3)^2+1$




obecně $f(x) = ax^2+bx+c$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$

Pozn. $a>0 \dots \cup$

$a<0 \dots \cap$

1) průsečík s osou y ... $x=0 \dots P_y=[0,c]$ (existuje vždy)

2) průsečík s osou x ... $ax^2+bx+c=0$ „řešení kvadratické rce"

2 způsoby A), B)

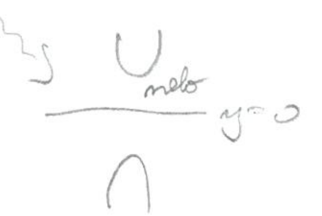
A) Diskriminant (vždy proveďte zkoušku)

$D = b^2-4ac \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D>0 \dots$ 2 kořeny (průsečíky) $\qquad P_{x_1}=[x_1,0]$

$D=0 \dots$ 1 kořen $\qquad P_{x_2}=[x_2,0]$

$D<0 \dots$ žádný kořen



B) Vietovy vzťahy

! platí pro tvar $x^2+bx+c=0$ $(a=1)$

$x_1 \cdot x_2 = c$

$x_1+x_2=-b$

našel jsem kořeny $x_1, x_2$, mohu zapsat f v součinovém tvaru

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

3) souřadnice vrcholu

Ã) mám 2 kořeny $x_1, x_2$ $\Rightarrow V=\left[\frac{x_1+x_2}{2}; \dots\right]$

dopočítat dosazením

Č) doplnění na čtverec

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c =$$
$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right) \boxed{-\frac{b^2}{4a}} + c =$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c =$$
$$= a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$V=\left[-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right]$$

$$c-\frac{b^2}{4a} = \frac{-b^2-4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

B̃) vzoreček: stačí si zapamatovat $V=\left[-\frac{b}{2a}; \dots\right]$

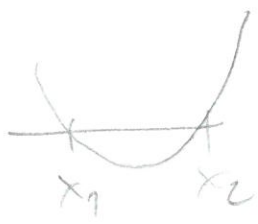
funguje vždy

dopočítat dosazením

D̃) derivace, najít extrém

4) Kdy je $f(x) \overset{?}{<} 0$, $> 0$

a) mám 2 kořeny: $a>0$



$f(x)<0$

$x \in (x_1, x_2)$

$a<0$

$f(x)>0$

$x \in (x_1, x_2)$

b) mám 1, žádný kořen $a>0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, $a<0 \Rightarrow f(x) \leq 0$

$\boxed{\text{Př}}\boxed{2}$ $\quad -\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3$

1) $P_y = [0, -3]$

2) B) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3=0$

$x^2-5x+6=0$

$x_1 \cdot x_2 = 6 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = 3 \quad P_{x_1} = [2, 0]$

$x_1 + x_2 = 5 \qquad\qquad x_2 = 2 \quad P_{x_2} = [3, 0]$

A) $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

3) $\tilde{A}$) $V = \left[\frac{3+2}{2}; -\frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{2^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}-3\right]$

$\tilde{C}$) $-\frac{1}{2}(x^2-5x)-3 = -\frac{1}{2}\left(x^2-5x+\frac{5^2}{2^2}\right)+\frac{5^2}{2^3}-3 =$

$= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{8}-\frac{24}{8} =$

$= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$

$V = \left[\frac{5}{2}; \frac{1}{8}\right]$

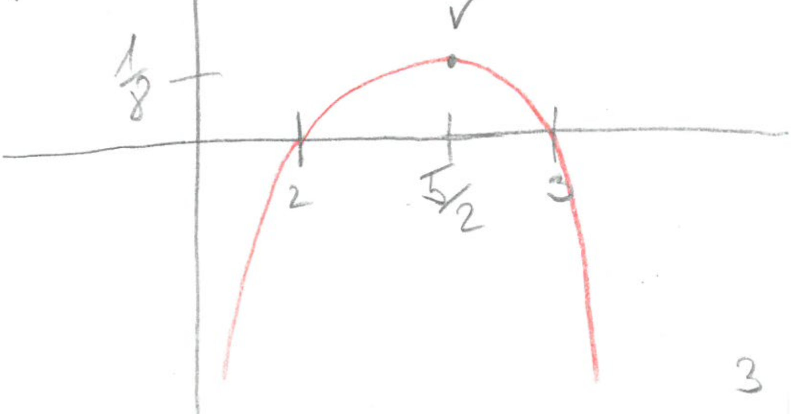
$\tilde{B}$) $V = \left[\underbrace{\frac{-\frac{5}{2}}{-1}}_{=\frac{5}{2}}; \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{2^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}-3}_{=-\frac{25}{8}+\frac{25}{4}-\frac{24}{8}}\right]$

$-\frac{25}{8}+\frac{25}{4}-\frac{24}{8} = \frac{50-25-24}{8} = \frac{1}{8}$

$\tilde{D}$) $\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3\right)' = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{5}{2}$

$-x+\frac{5}{2}=0$

$x = +\frac{5}{2}, \; y = \dots$



Př $\quad 3x^2-6x-105 = 3(x+5)(x-7)$


$P_y = [0, -105]$

$P_x = \{[-5, 0], [7, 0]\}$

$V = [1, 3-6-105] = [1, -108]$

Př $\quad \frac{1}{3}x^2+x+\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x+2)(x+1)$

$P_y = [0, 2/3]$

$P_x = \{[-2, 0], [-1, 0]\}$

$V = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right] = \left[-\frac{3}{2}; \frac{9+8-18}{12}\right] = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{12}\right]$

Př $\quad -4x^2+20x+24 = -4(x+1)(x-6)$

$P_y = [0, 24]$

$P_x = \{[-1; 0], [6, 0]\}$

$V = \left[\frac{5}{2}; -4\cdot\frac{25}{4}+20\cdot\frac{5}{2}+24\right] =$

$= \left[\frac{5}{2}; -25+50+24\right] = \left[\frac{5}{2}; 49\right]$

Př $\quad -x^2+6x-10$

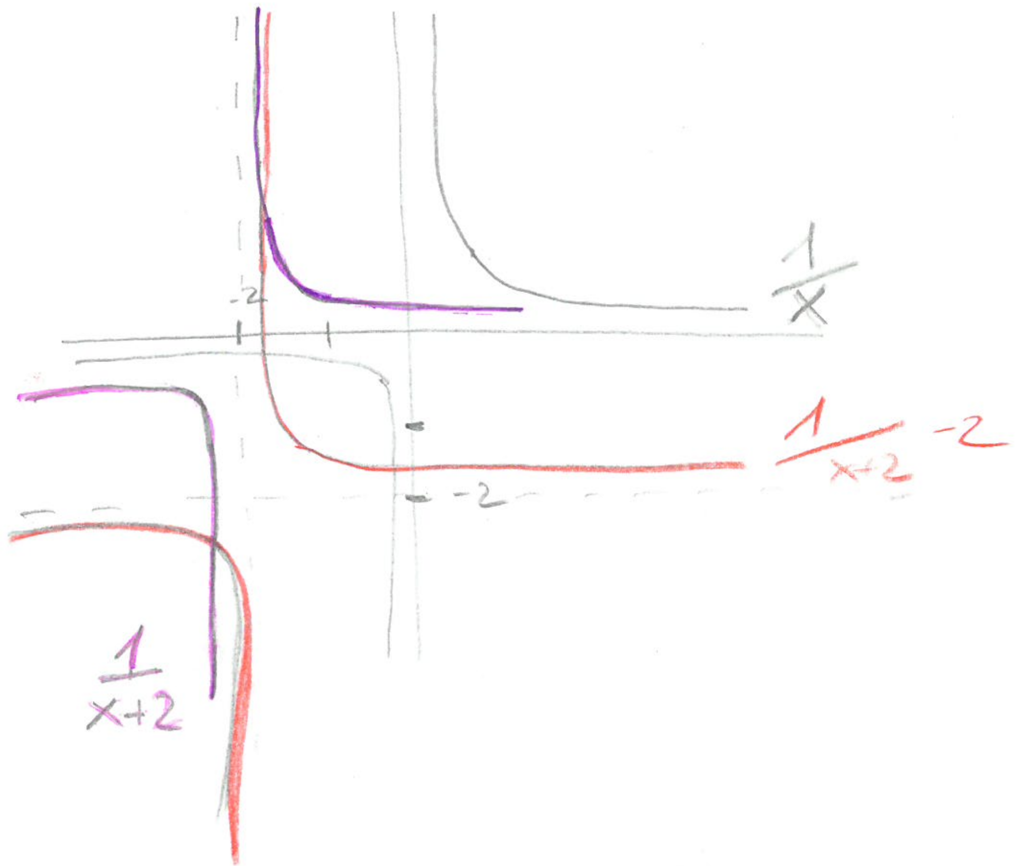
$P_y = [0; -10]$

nemá kořeny

$V = [3; -1]$

# II Lineární lomené funkce

$\boxed{Př}$ nakreslete $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - 2$




$S = [-2; -2]$

$\boxed{Př}$ $f(x) = \dfrac{5x+2}{8x+6}$ průsečíky? střed? asymptoty? nákres

$8x+6=0$

$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$5x+2 : (8x+6) = \frac{5}{8} + \dfrac{-\frac{7}{4}}{8x+6}$

$5x+\frac{30}{8}$

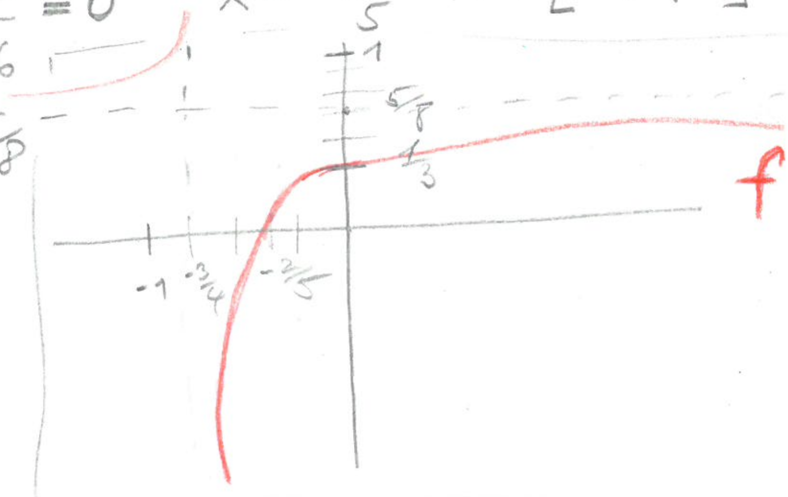
$\frac{8}{4} - \frac{15}{4}$

$S = [-\frac{3}{4}; \frac{5}{8}]$

Průsečík s osou $y$ : $f(0) = \frac{2}{6} \ldots [0, \frac{1}{3}]$

— " — $x$ : $\dfrac{5x+2}{8x+6} = 0$ $x = -\frac{2}{5}$ $\ldots [-\frac{2}{5}; 0]$

Asymptoty: $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$



DOBROVOLNÝ DÚ

$\boxed{P_{12}}$ $\dfrac{-2x+13}{2x-6}$

$P_y = \left[0, -\frac{13}{6}\right]$ $S = [3; -1]$

$P_x = \left[\frac{13}{2}; 0\right]$

$-2x+13 : 2x-6 = -1 + \dfrac{7}{(2x-6)}$

$-2x + 6$ $\qquad\qquad\qquad \parallel$

$13-6$ $\qquad\qquad (2(x-3))$

$\boxed{P_{12}^{*}}$ $\dfrac{\sqrt{2}x - \sqrt{6} + 1}{x - \sqrt{3}}$

$P_y = \left[0, \frac{-\sqrt{6}+1}{-\sqrt{3}}\right] = \left[0, \frac{\sqrt{\cancel{18}} - \sqrt{3}}{3}\right] = \left[0, \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}\right]$

$P_x = \left[\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}; 0\right] = \left[\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}; 0\right]$

$S = [\sqrt{3}, \sqrt{2}]$

$\sqrt{2}x - \sqrt{6} + 1 : x - \sqrt{3} = \sqrt{2} + \dfrac{1}{x-\sqrt{3}}$

$\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{3} + 1$

$\boxed{\text{PŘ}}$ $3x + y = 2$

$x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y$

$3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}y\right) + y = 2$

$2 - y + y = 2$

$0 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

všechny body: $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t, t\right]$ $t \in \mathbb{R}$

VÍCE PŘÍKLADŮ DÚ 3

## Definiční obor funkce

funkce: funkční předpis $f(x) = \ldots$
+ definiční obor ... pro jaká $x$ předpis uvažujeme

maximální definiční obor: maximální množina bodů, pro kterou dává funkční předpis (vzorec) smysl

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} / \{0\}$ ... „dělení nulou není definováno"
- $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0; +\infty)$ „odmocnina def. jen z nezáporných čísel"
- $h(x) = \log x$, $D_h = (0; +\infty)$

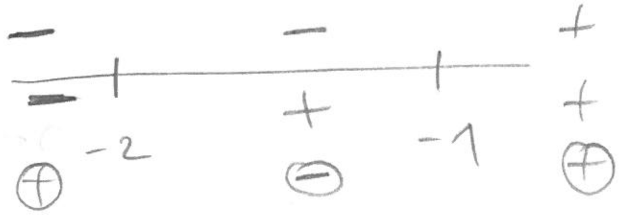
$\boxed{Př}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$x+2=0 \dots x=-2 \dots D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$P_y = [0; \frac{1}{2}]$

$P_x:$ $f(x)=0$, $\dfrac{x+1}{x+2}=0$, $x=-1$

$\Rightarrow P_x = [-1; 0]$



$\Rightarrow$ $f(x) > 0 \dots x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

$f(x) \leq 0 \dots x \in (-2; -1]$

---

$\boxed{Př}$ $f(x) = \sqrt{5-2x}$

$5-2x \geq 0$

$-2x \geq -5$

$x \leq 5/2$

$\Rightarrow D_f = (-\infty; \frac{5}{2}]$

$P_y = [0; \sqrt{5}]$

$P_x:$ $\sqrt{5-2x} = 0$

$x = \frac{5}{2}$

$f(x) \geq 0 \dots x \in D_f \dots$ odmocnina je vždy nezáporná

$\boxed{Př}$ $f(x) = \log(x^2 - 8x + 15)$

$x^2 - 8x + 15 > 0$

$(x-3)(x-5) > 0$

$\oplus \quad \ominus \quad \oplus$

$-- \; 3 \; + - \; 5 \; ++$

$x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$

$D_f = (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$

**Př** $f(x) = \sqrt[p]{x}$ , p liché $\in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $D_f = \mathbb{R}$

**Př** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x-3}$ $\left(= \dfrac{1}{(x+1)(x-3)}\right)$

$x^2-2x-3=0$

$x = -1, 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$- -$ $-1$ $+ -$ $3$ $++$

$f(x) > 0, x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

$P_y = [0; -\frac{1}{3}]$

$P_x$ … neexistuje $\quad \dfrac{1}{x^2-2x-3} \neq 0$

$f(x) \leq 0; x \in (-1; 3)$

**Př**

$f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{3-2x}$

$D_f$: 1) $3-2x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

2) $-x^2+3x+10 \geq 0$

$\parallel$

$\ominus (x+2)(x-5)$

$- - -$ $- + -$ $- ++$

$\ominus$ $-2$ $\oplus$ $5$ $\ominus$

$\Rightarrow x \in [2; 5]$

$D_f = [-2; 5] / \{\frac{3}{2}\}$

$\sqrt{\ldots}$ … vždy $\geq 0$

$\oplus$ $\frac{3}{2}$ $\ominus$

$P_y = [0; \frac{\sqrt{10}}{3}]$

$P_{x_1} = [-2; 0]$ , $P_{x_2} = [5; 0]$

$f(x) > 0, x \in (-2; \frac{3}{2})$

$f(x) \leq 0, x \in (\frac{3}{2}; 5]$

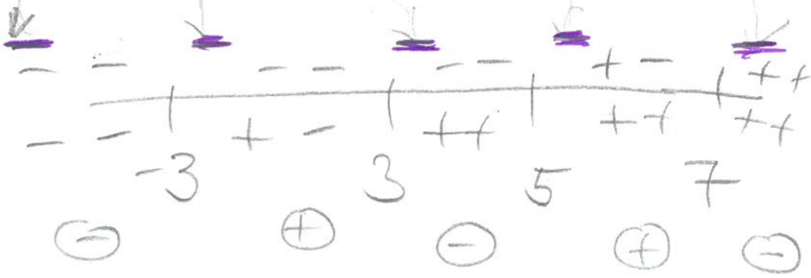
$\boxed{P_{12}}$

$$f(x) = \frac{-x^2+12x-35}{x^2-9} = -\frac{(x-5)(x-7)}{(x+3)(x-3)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

$P_y = [0;\frac{35}{9}]$

$P_{x_1} = [5;0]$ $P_{x_2} = [7;0]$




$f(x) > 0;\ x \in (-3;3) \cup (5;7)$

$f(x) \leq 0;\ x \in (-\infty;-3) \cup (3;5] \cup [7;+\infty)$

---

$\boxed{P_{12}}$

$$\frac{\sqrt{-5x^2+5}}{3x+3} = \frac{\sqrt{-5(x+1)(x-1)}}{3(x+1)}$$

$D_f = (-1;1]$

$P_y = [0;\frac{\sqrt{5}}{3}]$

$P_{x_1} = [1;0]$

$f(x) \geq 0,\ x \in D_f$

$\boxed{P_{12}}$ $$\frac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}} = \frac{-3(x-1)(x+4)}{\sqrt{2(x+5)(x-2)}}$$

$D_f = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

$P_y$ ... neexistuje

$P_{x_1} = [1; 0]$, $P_{x_2} = [-4; 0]$

| $f(x) < 0$ | $-5$ | není def. | $-4$ | není def. | $1$ | není def. | $2$ | $f(x) < 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|