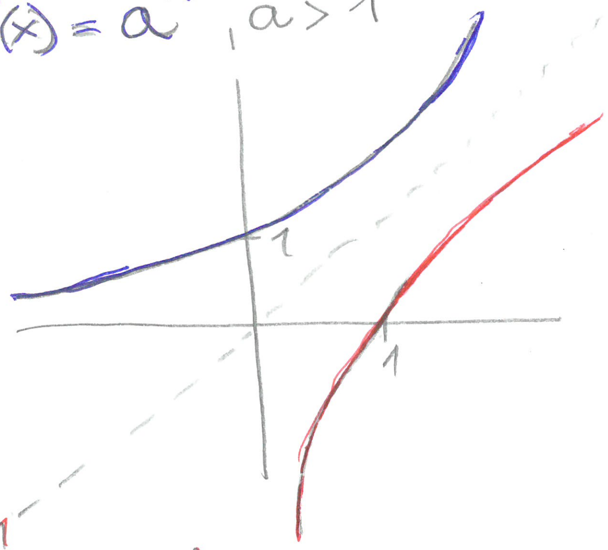
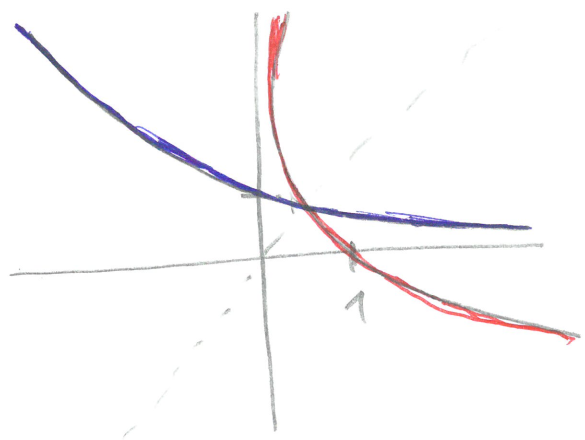
# Exponenciální / logaritmické rovnice

$f(x)=a^x$, $a>1$ $\qquad$ $g(x)=b^x$, $b\in(0,1)$





$f^{-1}(x)=\log_a x$ $\qquad$ $g^{-1}(x)=\log_b x$

Platí vztahy

1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ $\quad$ „násobení => sčítání exponentů"
2) $a^1=a$, $a^0=1$, $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
3) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $\alpha\in\mathbb{R}$
4) $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$
5) $\log_a x-\log_a y=\log_a x/y$
6) $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$
7) $a^x=y$, $\log_a y=x$ $\Rightarrow$ $a^{\log_a y}=y$

(*) $\log_a x=\dots$
„na co musím umocnit a, abych dostal x?"

$\boxed{\text{Př}}$ $5^x=125$

2 způsoby: a) „porovnání exponentů"

$$5^x=125=5^3 \Rightarrow x=3$$

b) „zlogaritmování"

$$5^x=125 \;/\log_5\dots$$

$$x=\log_5 125 \overset{(*)}{=} 3$$

$\boxed{\text{Př}}$ $3^x = 8$

a) $3^x = 3^{\log_3 8} \Rightarrow x = \log_3 8$

b) $x = \log_3 8$

---

$\boxed{\text{Př}}$ $6^{3x-2} = 36 \; (= 6^2)$

a) $3x - 2 = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

b) $3x - 2 = \log_6 36 = 2 \Rightarrow x = 4/3$

---

$\boxed{\text{Př}}$ $2^x + 2^{x-1} = 6$

$$2^x + \frac{2^x}{2} = 6$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2^x = 6$$

$$2^x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 = 2^2$$

$$x = 2$$

---

$\boxed{\text{Př}}$ $\log_3 x = 3$

a) „porovnání vnitřku logaritmů"

$\log_3 x = \log_3 27 \Rightarrow x = 27$

b) „aplikace exponenciály"

$\log_3 x = 3 \; / \; 3^{\cdots}$

$x = 3^3 = 27$

$\boxed{\text{Př}}$ $\log_5 2x = 11$

a) $\log_5 \boxed{2x} = \log_5 \boxed{5^{11}} \Rightarrow 2x = 5^{11}, \; x = \frac{5^{11}}{2}$

b) $2x = 5^{11} \Rightarrow x = \frac{5^{11}}{2}$

**Př** $\ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln 3$

$$\ln\left(\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\right) = \ln 3$$

$$x+1=3$$
$$x=2$$

VÍCE PŘÍKLADŮ

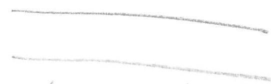
DÚ 3

## Soustavy rovnic

**Př**
$$8x+6y=2 \leftarrow \text{rovnice přímky}$$
$$2x+y=1$$

3 možnosti:

1 řeš.



žádné řeš.

nekonečně mnoho řešení

2 metody:

A) dosazovací metoda

I) $8x+6y=2$
II) $2x+y=1$

II) $\Rightarrow y=1-2x$ dosadím do I)

$$\Rightarrow 8x+6(1-2x)=2$$
$$8x+6-12x=2$$
$$-4x=-4$$
$$\boxed{x=1}$$
$$\Rightarrow \boxed{y=-1}$$

B) sčítací metoda

$$8x+6y=2$$
$$2x+y=1 \quad / \cdot(-4) \quad \oplus$$

„přičteme −4 násobek 2 řádku k prvnímu"

$$2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$
$$\Rightarrow 2x-1=1$$
$$\boxed{x=1}$$

$\boxed{\text{Př}}$ $3x + y = 2$

$x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y$

$3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}y\right) + y = 2$

$2 - y + y = 2$

$0 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

všechny body : $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t, t\right]$

$t \in \mathbb{R}$

VÍCE PŘÍKLADŮ DÚ 3

## Definiční obor funkce

funkce : funkční předpis $f(x) = \ldots$
+ definiční obor ... pro jaké $x$ předpis uvažujeme

maximální definiční obor : maximální množina bodů, pro kterou dává funkční předpis (vzorec) smysl

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ... „dělení nulou není definováno"
- $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0; +\infty)$ „odmocnina dělat jen z nezáporných čísel"
- $h(x) = \log x$, $D_h = (0; +\infty)$

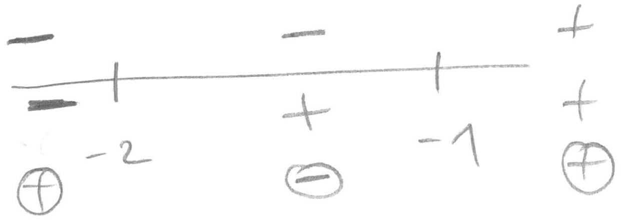
Př $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$x+2=0 \dots x=-2 \dots D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$P_y = [0; \frac{1}{2}]$

$P_x$: $f(x) = 0$, $\dfrac{x+1}{x+2} = 0$, $x = -1$

$\Rightarrow P_x = [-1; 0]$




$\Rightarrow$ $f(x) > 0 \dots x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

$f(x) \leq 0 \dots x \in (-2; -1]$

---

Př $f(x) = \sqrt{5-2x}$

$5-2x \geq 0$

$-2x \geq -5$

$x \leq 5/2$

$\Rightarrow D_f = (-\infty; \frac{5}{2}]$

$P_y = [0; \sqrt{5}]$

$P_x$: $\sqrt{5-2x} = 0$

$x = \frac{5}{2}$

$f(x) \geq 0 \dots x \in D_f \dots$ odmocnina je vždy nezáporná

$\boxed{Pr}$ $f(x) = \log(x^2 - 8x + 15)$

$x^2 - 8x + 15 > 0$

$(x-3)(x-5) > 0$

$x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$

$\underline{D_f = (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)}$

$\boxed{Př}$ $f(x) = \sqrt[p]{x}$ , $p$ liché $\in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{Př}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x-3} \left( = \dfrac{1}{(x+1)(x-3)} \right)$

$x^2-2x-3=0$

$x = -1, 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

$P_y = [0; -\frac{1}{3}]$

$P_x$... neexistuje $\quad \dfrac{1}{x^2-2x-3} \neq 0$

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$--$ $-1$ $+-$ $3$ $++$

$f(x) > 0, \ x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

$f(x) \leq 0; \ x \in (-1; 3)$

$\boxed{Př}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+3x+10}}{3-2x}$

$D_f$: 1) $3-2x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

2) $-x^2+3x+10 \geq 0$

$\quad = -(x+2)(x-5)$

$---$ $-+-$ $-++$

$\ominus$ $-2$ $\oplus$ $5$ $\ominus$

$\Rightarrow x \in [2; 5]$

$D_f = [-2; 5] / \{\frac{3}{2}\}$

$P_y = [0; \frac{\sqrt{10}}{3}]$

$P_{x_1} = [-2; 0], \ P_{x_2} = [5; 0]$

$\sqrt{\ldots}$ ... vždy $\geq 0$

$\oplus$ $\frac{3}{2}$ $\ominus$

$f(x) > 0, \ x \in (-2; \frac{3}{2})$

$f(x) \leq 0, \ x \in (\frac{3}{2}; 5]$

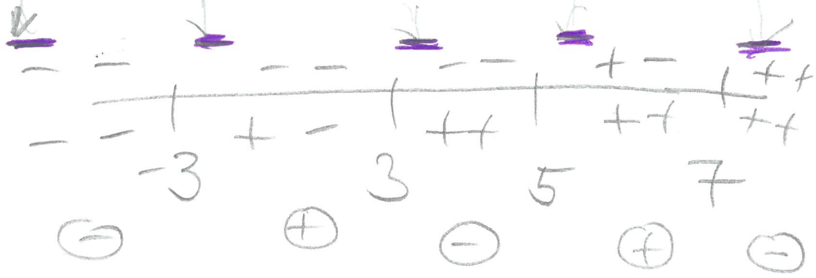
P12

$$f(x) = \frac{-x^2+12x-35}{x^2-9} = -\frac{(x-5)(x-7)}{(x+3)(x-3)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

$P_y = [0; \frac{35}{9}]$

$P_{x_1} = [5;0]$ $P_{x_2} = [7;0]$



$f(x) > 0;\ x \in (-3;3) \cup (5;7)$

$f(x) \leq 0;\ x \in (-\infty;-3) \cup (3;5] \cup [7;+\infty)$

---

P12

$$\frac{\sqrt{-5x^2+5}}{3x+3} = \frac{\sqrt{-5(x+1)(x-1)}}{3(x+1)}$$

$D_f = (-1;1]$

$P_y = [0; \frac{\sqrt{5}}{3}]$

$P_{x_1} = [1;0]$

$f(x) \geq 0,\ x \in D_f$

$\boxed{P_R}$ $$\frac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}} = \frac{-3(x-1)(x+4)}{\sqrt{2(x+5)(x-2)}}$$

$D_f = (-\infty;-5) \cup (2;+\infty)$

$P_y$ … neexistuje

$P_{x_1} = [1;0]$, $P_{x_2} = [-4;0]$

$f(x)<0$ | $-5$ | není def | $-4$ | není def | $1$ | není def | $2$ | $f(x)<0$