$\boxed{\text{Př}}$ DEF. OBOR FUNKCE

$$f(x) = \frac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}}$$

- ☐ NESMÍM DĚLIT NULOU
- ☐ JEN NEZÁPORNÁ ČÍSLA POD ODMOCNINOU $\longrightarrow 2x^2+6x-20 \geq 0$

$$\sqrt{0} = 0 \Rightarrow 2x^2+6x-20 > 0 \quad /\cdot \tfrac{1}{2}$$

$$x^2+3x-10 > 0$$

$$\Updownarrow \quad 2 \quad -5$$

$$(x-2)(x+5) > 0$$

$$D_f = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$$

Posloupnost „postupně očíslovaná reálná čísla"

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5, \dots$

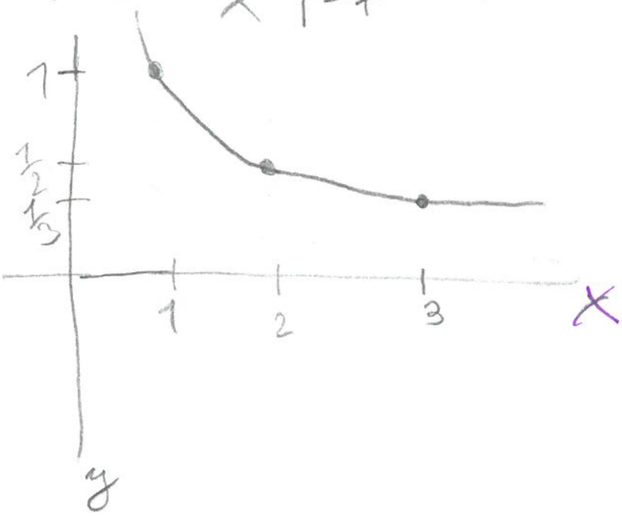
značení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

zadání vzorcem – např. $a_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}$

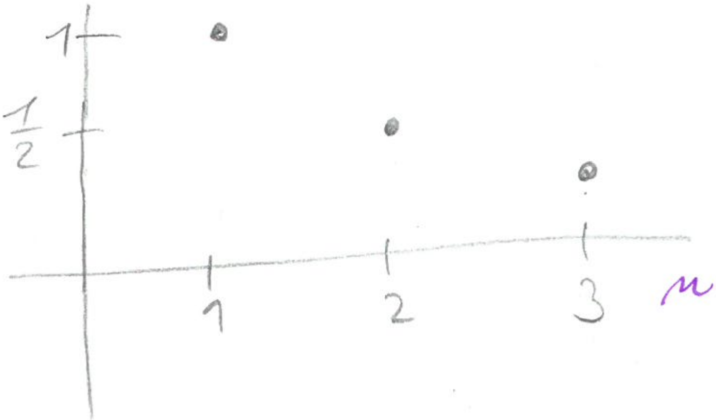
$(a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots)$

funkce vs. posloupnost

$f(x) = \frac{1}{x},\ D_f = (0; +\infty)$



$a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$



limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (v ∞) limitu a, pokud se členy posloupnosti blíží libovolně blízko k a, pro zvětšující se n.

značení $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

$a_n \to a$

Známé limity:

- $\lim n = +\infty$
- $\lim \frac{1}{n} = 0$

obecně ▪ $\lim n^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases}$

Př $\lim n^3 = \infty$ Př $\lim n^{-2} = 0$ Př $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

- $\lim 2^n = \infty$
- $\lim 3^{-n} = 0$

obecně ▪ $\lim a^n = \begin{cases} \text{neex.}; & a \leq -1 \\ 0; & a \in (-1;1) \\ 1; & a = 1 \\ \infty; & a > 1 \end{cases}$

Př $\lim (-1)^n$ neex, Př $\lim \frac{1}{3}^n = 0$ Př $\lim e^n = \infty$

Věty o aritmetice limit (VOAL)

$\lim a_n \pm b_n = \lim a_n \pm \lim b_n$
$\lim a_n \cdot b_n = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$
$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

POKUD MÁ PRAVÁ STRANA SMYSL

Nedefinované výrazy:

▪ $\infty - \infty$
▪ $\frac{0}{\pm\infty}$
▪ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
▪ $+\infty \cdot 0$
▪ $\frac{\pm\infty}{0}, \frac{a}{0}, \frac{0}{0}$

Př $\lim n^2 + 6n + 2 \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \lim n^2 + \lim 6n + \lim 2 \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \infty + \infty + 2 \underset{?}{=} +\infty$

Př $\lim n^2 - 6n + 2 \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} +\infty - \infty = ?$

$$\lim n^2 - 6n + 2 = \lim n^2\left(1 - \frac{6n}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) =$$

VYTKNOUT N NA NEJVYŠŠÍ MOCNINU

$\boxed{\text{FINTA Č.1}}$

$$\overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \lim n^2 \cdot \lim\left(1 - \frac{6\cancel{n}}{n^{\cancel{2}1}} + \frac{2}{n^2}\right) \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}}$$

$$= \lim n^2 \cdot \left[\lim 1 - \lim \frac{6}{n} + \lim \frac{2}{n^2}\right] =$$

$$= +\infty \cdot [1 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0] = +\infty \cdot 1 =$$

$$= +\infty$$

Př

$$\lim \frac{n+5}{5n-25} = ?$$

$$\lim \frac{n+5}{5n-25} = \lim \frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(5-\frac{25}{n}\right)} = \lim \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\left(5-\frac{25}{n}\right)} =$$

VYTKNOUT N NA NEJVYŠŠÍ MOCNINU

ZKRÁTIT

POSTUP DOSAZOVÁNÍ „$n = +\infty$" NA DALŠÍ STRANĚ

$$\overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\lim\left(5-\frac{25}{n}\right)} \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \frac{\lim 1 + \lim \frac{5}{n}}{\lim 5 - \lim \frac{25}{n}} \underset{?}{=}$$

$$\underset{?}{=} \frac{\lim 1 + 5 \cdot \lim \frac{1}{n}}{\lim 5 - 25 \cdot \lim \frac{1}{n}} \overset{?}{=} \frac{1 + 5 \cdot 0}{5 - 25 \cdot 0} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

lim KONSTANTA = KONSTANTA

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

Př

$$\lim \frac{n^3+4n^2-1}{(n-1)^3+(3n-2)^2} =$$

UPRAVIT

$$= \lim \frac{n^3+4n^2-1}{n^3-3n^2+3n-1+9n^2-12n+4} =$$

$$= \lim \frac{n^3+4n^2-1}{n^3+6n^2-9n+3} \overset{\text{VYTKNUTÍ}}{=} \lim \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{4n^2}{n^3}-\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{6n^2}{n^3}-\frac{9n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)} =$$

ZKRÁTIT

$$= \lim \frac{\left(1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{6}{n}-\frac{9}{n^2}+3\right)} \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}} \frac{\lim(\quad)}{\lim(\quad)} \overset{\text{VOAL}}{\underset{?}{=}}$$

ZNÁMÉ LIMITY

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim \frac{1}{n^3} = 0$$

$$= \frac{\lim 1 + \lim \frac{4}{n} - \lim \frac{1}{n^3}}{\lim 1 + \lim \frac{6}{n} - \lim \frac{9}{n^2} + \lim \frac{3}{n^3}} \underset{?}{=} \frac{1+4\cdot 0-0}{1+6\cdot 0-9\cdot 0+3\cdot 0} =$$

$$= \boxed{1}$$

$\boxed{\text{Př}}$

NELZE POUŽÍT

$$\lim \frac{n+5}{5n-25} \cancel{=} \frac{+\infty+5}{5(+\infty)-25} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

NEDEFINOVANÝ VÝRAZ

$\boxed{\text{„ZKUSÍM DOSADIT } n=+\infty\text{“}} \Leftrightarrow \boxed{\text{„PROVEDU, LIMITNÍ PŘECHOD“ POUŽIJI VOAL}}$

JINÝ POSTUP, FINTA Č. 1:

$$\lim \frac{n+5}{5n-25} = \lim \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\cancel{n}\left(5-\frac{25}{n}\right)} = \lim \frac{1+\frac{5}{n}}{5-\frac{25}{n}} =$$

$\boxed{\text{ZKUSÍM DOSADIT „}n=+\infty\text{“}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{PROVEDU LIMITNÍ PŘECHOD POUŽIJI VOAL}}$

$$= \frac{1+\frac{5}{+\infty}}{5-\frac{25}{+\infty}} = \frac{1+0}{5-0} = \frac{1}{5}$$

„$\frac{\text{KONSTANTA}}{+\infty} = 0$“

Př

FINTA Č.3

$$\lim \sqrt{n}\,(\overset{a}{\sqrt{n+2}} \overset{-}{-} \overset{b}{\sqrt{n}}) \cdot \underbrace{\frac{(\overset{a}{\sqrt{n+2}} \overset{+}{+} \overset{b}{\sqrt{n}})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}}_{=1} =$$

VHODNÉ PŘENÁSOBENÍ

POUŽITÍ VZORC

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}\,(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \underset{\text{VYTKNUTÍ}}{=} \lim \frac{2\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} =$$

$$\overset{?}{\underset{\text{VOAL}}{=}} \frac{\lim 2}{\lim \sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{\lim 2}{\sqrt{\lim 1+\lim \frac{2}{n}}+\lim 1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

Př

FINTA Č.2

$$\lim \frac{3^{n-1}+7^n}{7^{n-1}+5^n} = \lim \frac{\cancel{7^n}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3^n}{7^n}+1\right)}{\cancel{7^n}\left(\frac{1}{7}+\frac{5^n}{7^n}\right)} =$$

VYTKNOUT NEJVYŠŠÍ ZÁKLAD

ZKRÁTIT

$$\overset{\text{VOAL}}{\overset{?}{=}} \frac{\frac{1}{3}\lim\left(\frac{3}{7}\right)^n+\lim 1}{\lim\frac{1}{7}+\lim\left(\frac{5}{7}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0+1}{\frac{1}{7}+0} = \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7$$

ZNÁMÉ LIMITY

$\lim\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$	$\left\lvert\frac{3}{7}\right\rvert < 1$
$\lim\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$	$\left\lvert\frac{5}{7}\right\rvert < 1$

$\boxed{\text{Př}}$

$$\lim \frac{6n^4+n}{-9n^3-2n^2} \cancel{=} \frac{6(+\infty)^4+(+\infty)}{-9(+\infty)^3-2(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

$\boxed{\text{NEDEF. VÝRAZ}}$

„ZKUSÍM" DOSADIT „$n=+\infty$"

FINTA Č. 1

$$\lim \frac{6n^4+n}{-9n^3-2n^2} = \lim \frac{n^{\cancel{4}\,1}\left(6+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(-9-\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(6+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(-9-\frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{+\infty\left(6+\frac{1}{(+\infty)^3}\right)}{-9-\frac{2}{+\infty}} = \frac{+\infty(6+0)}{-9-0} = -\frac{6}{9}(+\infty) =$$

$$= -\infty$$

ZKUSÍM DOSADIT $n=+\infty$

$\boxed{\text{Př}}$ DOBROVOLNÝ DÚ

$$\lim \frac{(n+2)^3-n(n^2+1)}{(4-3n)^2} = \frac{2}{3}$$