

### 3. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

#### Definiční obor, průsečíky os, kladnost/zápornost funkce

(a)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{4-x};$

(b)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{-x^2+4x+21};$

(c)  $f(x) = \frac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}}.$

#### Řešení

- (a) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou  $\{1; 4\}$ . Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že  $(x-1)(x-4) \geq 0$  a z druhé podmínky dostáváme  $x \neq 4$ . Dohromady  $D_f = (-\infty; 1) \cup (4, \infty)$ . Průsečík s osou  $y$  nalezneme tak, že dosadíme  $x = 0$  ( $P_y = [0, 1/2]$ ). Průsečík s osou  $x$  nalezneme řešením rovnice  $f(x) = 0$  a tedy dostáváme průsečík ( $P_x = [1, 0]$ ). Druhý není, neboť druhým řešením  $f(x) = 0$  je bod  $x = 4$ , který není v definičním oboru funkce (nelze dosadit, dělili bychom nulou). Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f(x) > 0$	$f(x)$ nedefinováno	$f(x) < 0$

- (b) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou  $\{-3; 1/2; 7\}$ . Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že  $2x-1 \geq 0$  a z druhé podmínky dostáváme  $x \neq -3$  &  $x \neq 7$ . Dohromady  $D_f = (1/2; \infty) - \{7\}$ . Průsečík s osou  $y$  nalezneme tak, že dosadíme  $x = 0$ . Protože však bod  $x = 0$  není v definičním oboru, vidíme, že funkce  $f$  neprotíná osu  $y$ . Průsečík s osou  $x$  nalezneme řešením rovnice  $f(x) = 0$  a tedy dostáváme průsečík

$(P_x = [1/2, 0])$ . Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; 1/2)$	$(1/2, 7)$	$(4, \infty)$
$f(x)$ nedefinováno	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$

- (c) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou  $\{-5; -4; 1; 2\}$ . Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že  $2x^2 + 6x - 20 \geq 0$  a z druhé podmínky dostáváme  $2x^2 + 6x - 20 \neq 0$ . Dohromady  $D_f = \mathbb{R} - \langle -5; 2 \rangle$ . Průsečík s osou  $y$  nalezneme tak, že dosadíme  $x = 0$ . Protože však bod  $x = 0$  není v definičním oboru, vidíme, že funkce  $f$  neprotíná osu  $y$ . Průsečík s osou  $x$  nalezneme řešením rovnice  $f(x) = 0$  a tedy dostáváme  $x = -4$  a  $x = 1$ . Protože ani jeden z těchto bodů není v definičním oboru funkce  $f$ , nemá tato funkce žádný průsečík s osou  $y$ . Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; -5)$	$(-5; -4)$	$(-4; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$f(x) < 0$	$f(x)$ nedefinováno	$f(x)$ nedefinováno	$f(x)$ nedefinováno	$f(x) < 0$

**Dotaz** - Exponenciální a logaritmické rovnice

**Dotaz** - porozumění pojmům **posloupnost** a **limita posloupnosti**

**Opakování z přednášky**

- **Exponenciála a logaritmus** - definice, základní vztahy
- **Posloupnost** - zápis, jednoduché příklady, obecný pojem, graf posloupnosti, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost.
- **Posloupnost vs. Funkce**
- **Limita** - nevlastní body, dodefinování posloupnosti a funkce
- **Výpočet limit**

Znamé limity (I)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ ;

(II)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n, n^2, n^3, n^k = \infty$ ;

(III)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a = 0 \\ \infty & a > 0 \end{cases}$

(IV)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n, 3^n = \infty$ .

(V)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \text{neexistuje} & a \leq -1 \\ 0 & a \in (-1; 1) \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$

Pravidla pro počítání Obecně lze s limitami počítat jako s normálními čísly, **kromě případů**

- \*  $\infty - \infty$ ;
- \*  $0/\pm \infty$ ;
- \*  $\pm \infty/\pm \infty$ .

Konkrétní pravidla, která platí **mimo případy výše**:

$$(P1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$(P2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$(P3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right);$$

$$(P4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

Trik 1 Vytýkání v polynomech - použijeme známou limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n$ .

Trik 2 Vytýkání v exponenciále - použijeme známou limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ .

Trik 3 Použití vzorce  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ , případně vzorců  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$  nebo  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ . Po úpravě používáme postup Trik 1 nebo Trik 2.

**Počítání limit posloupností** Vypočítejte limity daných posloupností. *Snažte se nad každé rovnítko/úpravu sami pro sebe psát zdůvodnění ve smyslu odvolávání se na jedno z pravidel výše.*

i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1}$ ;

ii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-55}{10\,000\,000\,000}$ ;

iii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-12}{6378-5n}$ ;

iv  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)^2}{n^2-2}$ ;

v  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-5n+1}{n^2+20}$ ;

vi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3-(n+1)^2}{n^4}$ ;

vii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n^2+1}$ ;

viii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$ ;

ix  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 2^n}{(5/2)^{n+1}}$ ;

x  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(7/8)^n - 5^{n+2}}{5^n - (7/8)^{n-1}}$ ;

xi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+2} - 4^n}{5 \cdot 4^{n-1} + 20}$ ;

xii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{2n+1}$ ;

xiii  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - n - 1} - \sqrt{n+1}$ ;

xiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{2n-12}}$ ;

xv  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2-3n)(1+4n)}{n^2+6}$ .

## Řešení

- i Pomocí Trik 1, pravidlo (P1) a známé limity (I):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2}{2+1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2+1/n} \stackrel{\text{(P1)}}{=} \frac{2}{2+\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} \stackrel{\text{(I)}}{=} \frac{2}{2+0} = 1;$
- ii Přímou plyne ze známé limity (II):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-55}{10\,000\,000\,000} = \infty;$
- iii Pomocí Trik 1 a známé limity (I):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-12}{6378-5n} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{7-\frac{12}{n}}{\frac{6378}{n}-5} \stackrel{\text{(P1),(I)}}{=} \frac{7-0}{0-5} = -\frac{7}{5};$
- iv Roznásobíme, použijeme Trik 1 a známou limitu (I):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)^2}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2-24n+16}{n^2-2} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \frac{9-\frac{24}{n}+\frac{16}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}}{1-\frac{2}{n^2}} \stackrel{\text{(P1),(P2),(I)}}{=} \frac{9+0+0}{1-0} = 9;$
- v Použijeme Trik 1, pravidla (P1-P4) a známou limitu (II):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-5n+1}{n^2+20} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \frac{5-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{20}{n^2}}}{1+\frac{20}{n^2}} \stackrel{\text{(P1-P4),(I)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} n \right) \frac{5-0+0}{1+0} \stackrel{\text{(II)}}{=} \infty;$
- vi Použijeme Trik 1, pravidla (P1-P4) a známou limitu (I):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3-(n+1)^2}{n^4} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \frac{6-\frac{n^2+2n+1}{n^3}}{1}}{1} \stackrel{\text{(P1-P4),(I)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \frac{6-0}{1};$
- vii Roznásobíme, Trik 1, pravidla (P1-P4):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1-(n^2-2n+1)}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n^2+1} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \frac{4}{1+\frac{1}{n^2}} \stackrel{\text{(P1-P4),(I)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{4}{1+0} \stackrel{\text{(I)}}{=} 0;$
- viii Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n \stackrel{\text{(V)}}{=} 0;$
- ix Použijeme Trik 2 a známou limitu (V) a pravidla (P1-P4):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 2^n}{(5/2)^{n+1}} \stackrel{\text{Trik 2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n \frac{1-(\frac{2}{3 \cdot 5})^n}{1+\frac{1}{2 \cdot 5^n}}}{1+\frac{1}{2 \cdot 5^n}} \stackrel{\text{(V)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n} \right) \frac{1-0}{1+0} \stackrel{\text{(V)}}{=} 0 \cdot 1 = 0;$
- x Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4), Trik 2 a základní znalosti práce s exponenty:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(7/8)^n - 5^{n+2}}{5^n - (7/8)^{n-1}} \stackrel{\text{Trik 2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \frac{8 \cdot (\frac{7}{8 \cdot 5})^n - 5^2}{1-8/7 \cdot (\frac{7}{8 \cdot 5})^n}}{1-8/7 \cdot 0} \stackrel{\text{(P1-P4),(V)}}{=} 1 \cdot \frac{8 \cdot 0 - 25}{1-8/7 \cdot 0} = -25;$

xi Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4), Trik 2 a základní znalosti práce s exponenty:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+2} - 4^n}{5 \cdot 4^{n-1} + 20} \stackrel{\text{Trik 2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{4^n \cdot 5 \cdot 1/4 + \frac{20}{4^n}} \stackrel{\text{(P1-P4),(V)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{36 \cdot 0 - 1}{5/4 + 0} = -4/5 = -0.8;$

xii Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{2n+1} \stackrel{\text{Trik 3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{2n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{2n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (2n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-1}{\sqrt{n} + \sqrt{2n+1}} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2+1/n}} \stackrel{\text{(P1-P4),(I),(II)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \right) \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2+0}} = \infty \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = -\infty;$

xiii Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - n - 1} - \sqrt{n+1} \stackrel{\text{Trik 3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - n - 1} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n^2 - n - 1} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2 - n - 1} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - 1 - (n+1)}{\sqrt{n^2 - n - 1} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - 2}{\sqrt{n^2 - n - 1} + \sqrt{n+1}} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} \cdot \frac{1 - \frac{2n}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \stackrel{\text{(P1-P4),(I,II)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1-0-0}{\sqrt{1-0-0} + \sqrt{0+0}} = \infty \cdot 1 = \infty;$

xiv Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{2n-12}} \stackrel{\text{Trik 3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1})}{(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-1})\sqrt{2n-12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-1})\sqrt{2n-12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\sqrt{(n^2+n+1)(2n-12)} + \sqrt{(n^2-1)(2n-12)})} \stackrel{\text{Trik 1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(3/2)} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{2 - \frac{10n^2}{n^3} - \frac{10n}{n^3} + \frac{12}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{12n^2}{n^3} - \frac{2n}{n^3} + \frac{12}{n^3}} \right)} \stackrel{\text{(P1-P4),(I,II)}}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(3/2)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2-0-0+0} + \sqrt{1-0-0+0}} = \infty \cdot 1 = \infty;$