Limity funkcí

CV5

fce f má v bodě x_0 limitu a

$\iff$ „když se x blíží (libovolně blízko) k x_0, tak se $f(x)$ blíží libovolně blízko k a"

Značení: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ nebo $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$

Jednostranné limity:

fce f má v bodě x_0 jednostrannou limitu zprava (zleva)

$\iff$ „když se x blíží k x_0 zprava (zleva), tak se $f(x)$ blíží libovolně blízko k a"

Značení: zprava $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$ zleva $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$

Věta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0+} f(x) = a \text{ a } \lim_{x \to x_0-} f(x) = a$$

$x_0 \in D_f$, tak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

[budeme pracovat pouze s funkcemi, které jsou spojité ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru]

Věta o aritmetice limit

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$ MÁ-LI P.S. SMYSL

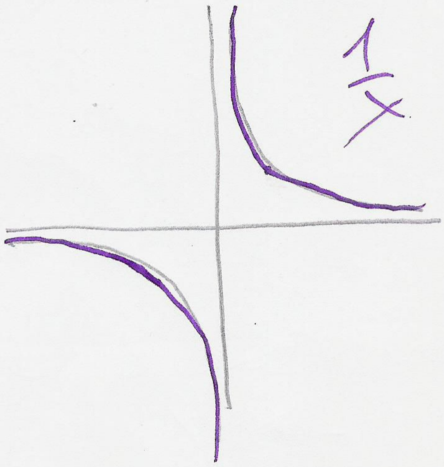
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right),$$ —||—

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$ —||—

Důležitý příklad $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ pokud $x_0 \in D_f$, např. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

„vždy zkusím dosadit, pokud nedostanu neurčitý výraz jsem hotov"



$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

„podobné jako určování limit posloupností"

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$$

Př $\frac{1}{x^2}$

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x)=\frac{x+5}{x-1}$ Určete D_f, spočítejte limity v krajních bodech D_f.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(1+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0})}\underset{\text{VOAL}}{=}\frac{1+0}{1-0}=1$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}=\frac{1+0}{1-0}=1$

dosadil

C) $\lim\limits_{x\to1_+}\frac{x+5}{x-1}=\frac{6}{0+}=+\infty$

(x−1) se blíží k 0 zprava

1 blížím se k 1 zprava

1,01 1,1

0 0,01 0,1

D) $\lim\limits_{x\to1_-}\frac{x+5}{x-1}=\frac{6}{0-}=-\infty$

(x−1) se blíží k 0 zleva

1 blížím se k 1 zleva

0.9 0.99

−0,1 −0,01 0

E) C)+D) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+5}{x-1}$ NEEXISTUJE

$\boxed{P_2}$ $f(x)=\dfrac{3x^2+3}{4-x}$, $D_f=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$

A) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+3}{4-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(3+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{4}{x}-1\right)}\overset{\text{VOAL}}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1}\right)=$$

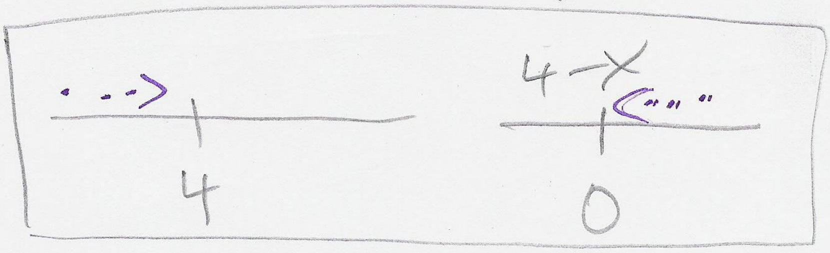
$$=+\infty\cdot\left(\frac{3+0}{0-1}\right)=+\infty\cdot(-3)=-\infty$$

B) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+3}{4-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}\right)}{x\left(\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1\right)}\overset{\text{VOAL}}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1}\right)\overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=}-\infty\cdot\left(\frac{3+0}{0-1}\right)=-\infty\cdot(-3)=+\infty$$

C) $$\lim_{x\to4_+}\frac{3x^2+3}{4-x}=\frac{3\cdot16+3}{0_-}=\frac{51}{0-}=-\infty$$

D) $$\lim_{x\to4_-}\frac{3x^2+3}{4-x}=\frac{3\cdot16+3}{0+}=\frac{51}{0+}=+\infty$$



E) C) + D) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2+3}{4-x}$ NEEXISTUJE

$\boxed{P_{12}}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8}$, $\underset{\geq 0}{x^2} + \underset{\geq 0}{6} \geq 0$ PLATÍ VŽDY

$D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{\cancel{x}(4-\frac{8}{x})} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{\sqrt{1+0}}{4-0} = \dfrac{1}{4}$

ŠPATNĚ

B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \cancel{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{(4-\frac{8}{x})} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{\sqrt{1+0}}{4-0} = \dfrac{1}{4}}$

OPRAVA

c) $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \dfrac{\sqrt{10}}{0+} = +\infty$

5a

B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{x\left(4-\frac{8}{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{x\left(4-\frac{8}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-\cancel{x})\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{\cancel{x}\left(4-\frac{8}{x}\right)} =$

JDUDO $-\infty$

$\Rightarrow |x| = -x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-1)\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{4-\frac{8}{x}} \underset{\text{KOAL}}{=} -\dfrac{1}{4}$

5b

D) $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \frac{\sqrt{10}}{0^-} = -\infty$

E) C) + D) $\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8}$ NEEXISTUJE

$\boxed{Př}$ $f(x) = \frac{3x^2+2}{-x^2+4x} = \frac{3x^2+2}{-x(x-4)}$

1) D_f : $-x^2+4x=0$

$-x(x-4)=0$

$x_1=0 \quad x_2=4$

$D_f = (-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$

2)

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{-x^2+4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2(3+\frac{2}{x^2})}{x^2(-1+\frac{4}{x})} \underset{\uparrow\ \text{LIMITNÍ PŘECHOD}}{=} \frac{3+0}{(-1+0)} = -3$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{-x^2+4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(3+\frac{2}{x^2})}{\cancel{x^2}(-1+\frac{4}{x})} \underset{\uparrow\ \text{LIM PŘECHOD}}{=} \frac{3+0}{(-1+0)} = -3$

C) $\lim\limits_{x\to0_+} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)} \underset{\text{VOAL}}{=} \lim\limits_{x\to0_+} \frac{3x^2+2}{-x} \cdot \lim\limits_{x\to0_+} \frac{1}{(x-4)} =$

LIMITNÍ PŘECHOD $= \frac{+2}{0_-} \cdot \frac{1}{-4} = -\infty \cdot (-\frac{1}{4}) = +\infty$

D) $\lim\limits_{x\to0_-} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)} \underset{\text{VOAL}}{=} \lim\limits_{x\to0_-} \frac{3x^2+2}{-x} \cdot \lim\limits_{x\to0_-} \frac{1}{(x-4)} =$

LIM PŘECHOD $= \frac{+2}{0_+} \cdot \left(\frac{1}{-4}\right) = +\infty \cdot (-\frac{1}{4}) = -\infty$

E) C) $\wedge$ D) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)}$ NEEXISTUJE

F) $\lim\limits_{x\to4_+} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)} \underset{\text{VOAL}}{=} \lim\limits_{x\to4_+} \frac{3x^2+2}{-x} \cdot \lim\limits_{x\to4_+} \frac{1}{(x-4)} =$

$\underset{\text{PŘECH}}{\overset{\text{LIM}}{=}} \underbrace{\frac{3\cdot16+2}{-16}}_{\text{ZÁPORNÉ ČÍSLO}} \cdot \underbrace{\frac{1}{0_+}}_{+\infty} = -\infty$

G) $\lim\limits_{x\to4_-} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)} \underset{\text{VOAL}}{=} \lim\limits_{x\to4_-} \frac{3x^2+2}{-x} \cdot \lim\limits_{x\to4_-} \frac{1}{(x-4)} \underset{\text{PŘECH}}{\overset{\text{LIM}}{=}} \underbrace{\frac{3\cdot16+2}{-16}}_{\text{ZÁPORNÉ ČÍSLO}} \cdot \underbrace{\frac{1}{0_-}}_{-\infty} =$

$= +\infty$

H) F) $\wedge$ G) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to4} \frac{3x^2+2}{-x(x-4)}$ NEEXISTUJE

$\boxed{\text{Př}}$ (POUZE S VÝSLEDKY)

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $D_f = R \setminus \{-1\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	$-1+$	$-1-$	-1
=	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}$, $D_f = R \setminus \{\frac{1}{4}\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{4}+$	$\frac{1}{4}-$	$\frac{1}{4}$
=	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX

3) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$, $D_f = R \setminus \{\pm 2\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	$-2+$	$-2-$	$2+$	$2-$	-2	2
=	3	3	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX	NEEX

4) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$, $D_f = R \setminus \{\pm 1\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	$-1+$	$-1-$	$1+$	$1-$	-1	1
=	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX	NEEX