3. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Definiční obor, průsečíky os, kladnost/zápornost funkce

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{4-x}$;

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{-x^2+4x+21}$;

(c) $f(x) = \frac{-3x^2-9x+12}{\sqrt{2x^2+6x-20}}$.

Řešení

(a) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $\{1; 4\}$. Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že $(x-1)(x-4) \geq 0$ a z druhé podmínky dostáváme $x \neq 4$. Dohromady $D_f = (-\infty; 1\rangle \cup (4, \infty)$. Průsečík s osou y nalezneme tak, že dosadíme $x = 0$ ($P_y = [0, 1/2]$). Průsečík s osou x nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$ a tedy dostáváme průsečík ($P_x = [1, 0]$). Druhý není, neboť druhým řešením $f(x) = 0$ je bod $x = 4$, který není v definičním oboru funkce (nelze dosadit, dělili bychom nulou).Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f(x) > 0$	$f(x)$ nedefinováno	$f(x) < 0$

(b) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $\{-3; 1/2; 7\}$. Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že $2x - 1 \geq 0$ a z druhé podmínky dostáváme $x \neq -3 \& x \neq 7$. Dohromady $D_f = \langle 1/2; \infty) - \{7\}$. Průsečík s osou y nalezneme tak, že dosadíme $x = 0$. Protože však bod $x = 0$ není v definičním oboru, vidíme, že funkce f neprotíná osu y. Průsečík s osou x nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$ a tedy dostáváme průsečík

($P_x = [1/2, 0]$). Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; 1/2)$	$(1/2, 7)$	$(4, \infty)$
$f(x)$ nedefinováno	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$

(c) Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $\{-5; -4; 1; 2\}$. Aby vše bylo definováno, nesmíme odmocňovat záporné číslo a nesmíme dělit nulou. Tedy z první podmínky dostáváme, že $2x^2 + 6x - 20 \geq 0$ a z druhé podmínky dostáváme $2x^2 + 6x - 20 \neq 0$. Dohromady $D_f = \mathbb{R} - \langle -5; 2 \rangle$. Průsečík s osou y nalezneme tak, že dosadíme $x = 0$. Protože však bod $x = 0$ není v definičním oboru, vidíme, že funkce f neprotíná osu y. Průsečík s osou x nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$ a tedy dostáváme $x = -4$ a $x = 1$. Protože ani jeden z těchto bodů není v definičním oboru funkce f, nemá tato funkce žádný průsečík s osou y. Kladnost a nezápornost funkce určíme ze součino-podílového tvaru na intervalech mezi nulovými body jmenovatele a čitatele:

$(-\infty; -5)$	$(-5; -4)$	$(-4; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$f(x) < 0$	$f(x)$ nedefinováno	$f(x)$ nedefinováno	$f(x)$ nedefinováno	$f(x) < 0$

Dotaz - Exponenciální a logaritmické rovnice

Dotaz - porozumnění pojmům **posloupnost** a **limita posloupnosti**

Opakování z přednášky

- **Exponenciála a logaritmus** - definice, základní vztahy
- **Posloupnost** - zápis, jednoduché příklady, obecný pojem, graf posloupnosti, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost.
- **Posloupnost vs. Funkce**
- **Limita** - nevlastní body, dodefinování posloupnosti a funkce
- **Výpočet limit**

Známé limity (I) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$;

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} n, n^2, n^3, n^k = \infty$;

(III) $$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a = 0 \\ \infty & a > 0 \end{cases}$$

(IV) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n, 3^n = \infty$.

(V) $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{neexistuje} & a \leq -1 \\ 0 & a \in (-1; 1) \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$$

Pravidla pro počítání Obecně lze s limitami počítat jako s normálními čísly, **kromě případů**

- $\infty - \infty$;
- $0/\pm\infty$;
- $\pm\infty/\pm\infty$.

Konkrétní pravidla, která platí **mimo případy výše**:

(P1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(P2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(P3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$;

(P4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Trik 1 Vytýkání v polynomech - použijeme známou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n$.

Trik 2 Vytýkání v exponenciále - použijeme známou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

Trik 3 Použití vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, případně vzorců $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ nebo $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Po úpravě používáme postup Trik 1 nebo Trik 2.

Počítání limit posloupností Vypočítejte limity daných posloupností. ***Snažte se nad každé rovnítko/úpravu sami pro sebe psát zdůvodnění ve smyslu odvolávání se na jedno z pravidel výše.***

i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1}$;

ii $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-55}{10\,000\,000\,000}$;

iii $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-12}{6378-5n}$;

iv $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-4)^2}{n^2-2}$;

v $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-5n+1}{n^2+20}$;

vi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3-(n+1)^2}{n^4}$;

vii $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n^2+1}$;

viii $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n}$;

ix $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.5^n-2^n}{(5/2)^n+1}$;

x $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8(7/8)^n-5^{n+2}}{5^n-(7/8)^{n-1}}$;

xi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+2}-4^n}{5\cdot 4^{n-1}+20}$;

xii $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{2n+1}$;

xiii $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n-1} - \sqrt{n+1}$;

xiv $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{2n-12}}$;

xv $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2-3n)(1+4n)}{n^2+6}$.

Řešení

i Pomocí Trik 1, pravidlo (P1) a známé limity (I): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2}{2+1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2+1/n} \overset{\text{(P1)}}{=} \frac{2}{2+\cdot \lim\limits_{n\to\infty} 1/n} \overset{\text{(I)}}{=} \frac{2}{2+0} = 1$;

ii Přímo plyne ze známé limity (II): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-55}{10\,000\,000\,000} = \infty$;

iii Pomocí Trik 1 a známé limity (I): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-12}{6378-5n} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{7-\frac{12}{n}}{\frac{6378}{n}-5} \overset{\text{(P1),(I)}}{=} \frac{7-0}{0-5} = -\frac{7}{5}$;

iv Roznásobíme, použijeme Trik 1 a známou limitu (I): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-4)^2}{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n^2-24n+16}{n^2-2} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{9-\frac{24n}{n^2}+\frac{16}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} \overset{\text{(P1),(P2),(I)}}{=} \frac{9+0+0}{1-0} = 9$;

v Použijeme Trik 1, pravidla (P1-P4) a známou limitu (II): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-5n+1}{n^2+20} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} \frac{5-\frac{5n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{20}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n \frac{5-\frac{5n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{20}{n^2}} \overset{\text{(P1-P4),(I)}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} n\right) \frac{5-0+0}{1+0} \overset{\text{(II)}}{=} \infty$;

vi Použijeme Trik 1, pravidla (P1-P4) a známou limitu (I): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3-(n+1)^2}{n^4} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} \frac{6-\frac{n^2+2n+1}{n^3}}{1} \overset{\text{(P1-P4), (I)}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \frac{6-0}{1}$;

vii Roznásobíme, Trik 1, pravidla (P1-P4): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1-(n^2-2n+1)}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n^2+1} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \frac{4}{1+\frac{1}{n^2}} \overset{\text{(P1-P4),(I)}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{4}{1+0} \overset{\text{(I)}}{=} 0$;

viii Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{\text{(V)}}{=} 0$;

ix Použijeme Trik 2 a známou limitu (V) a pravidla (P1-P4): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.5^n-2^n}{(5/2)^n+1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.5^n}{2.5^n} \frac{1-\left(\frac{2}{3.5}\right)^n}{1+\frac{1}{2.5^n}} \overset{\text{(V)}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.5^n}{2.5^n}\right) \frac{1-0}{1+0} \overset{\text{(V)}}{=} 0 \cdot 1 = 0$;

x Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4), Trik 2 a základní znalosti práce s exponenty: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8(7/8)^n-5^{n+2}}{5^n-(7/8)^{n-1}} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \frac{8\cdot\left(\frac{7}{8\cdot5}\right)^n-5^2}{1-8/7\cdot\left(\frac{7}{8\cdot5}\right)^n} \overset{\text{(P1-P4),(V)}}{=} 1 \cdot \frac{8\cdot0-25}{1-8/7\cdot0} = -25$;

xi Použijeme známou limitu (V) a pravidla (P1-P4), Trik 2 a základní znalosti práce s exponenty: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+2}-4^n}{5\cdot 4^{n-1}+20} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n} \frac{4\cdot 9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{5\cdot 1/4+\frac{20}{4^n}} \overset{\text{(P1-P4),(V)}}{=}$ $\lim\limits_{n\to\infty} 1\cdot \frac{36\cdot 0-1}{5/4+0} = -4/5 = -0.8;$

xii Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{2n+1} \overset{\text{Trik 3}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{2n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{2n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-(2n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{2+1/n}} \overset{\text{(P1-P4),(I),(II)}}{=}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\right)\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{2+0}} = \infty\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{2}} = -\infty;$

xiii Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n-1}-\sqrt{n+1} \overset{\text{Trik 3}}{=}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2-n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1-(n+1)}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n-2}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}} \overset{\text{Trik 1}}{=}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}\cdot\frac{1-\frac{2n}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} \overset{\text{(P1-P4),(I,II)}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1-0-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{0+0}} = \infty\cdot$ $1 = \infty;$

xiv Použijeme Trik 3 a předchozí arzenál: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{2n-12}} \overset{\text{Trik 3}}{=}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})}{(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1})\sqrt{2n-12}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n}{(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1})\sqrt{2n-12}} =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n}{(\sqrt{(n^2+n+1)(2n-12)}+\sqrt{(n^2-1)(2n-12)})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n}{(\sqrt{2n^3-10n^2-10n+12}+\sqrt{n^3-12n^2-2n+12})} \overset{\text{Trik 1}}{=}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^{(3/2)}} \frac{(1}{(\sqrt{2-\frac{10n^2}{n^3}-\frac{10n}{n^3}+\frac{12}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{12n^2}{n^3}-\frac{2n}{n^3}+\frac{12}{n^3}})} \overset{\text{(P1-P4),(I,II)}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^{(3/2)}}\right)\cdot$ $\frac{1}{\sqrt{2-0-0+0}+\sqrt{1-0-0+0}} = 0\cdot 1 = 0;$