Limity funkcí

CV6

fce f má v bodě x_0 limitu a

$\iff$ „když se x blíží (libovolně blízko) k x_0, tak se $f(x)$ blíží libovolně blízko k a"

znační: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ nebo $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$

Jednostranné limity:

fce f má v bodě x_0 jednostrannou limitu zprava (zleva)

$\iff$ „když se x blíží k x_0 zprava (zleva), tak se $f(x)$ blíží libovolně blízko k a"

znační: zprava $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$ zleva $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$

Věta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0+} f(x) = a \text{ a } \lim_{x \to x_0-} f(x) = a$$

$x_0 \in D_f$, tak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

[budeme pracovat pouze s funkcemi, které jsou spojité ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru]

1

Věta o aritmetice limit

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x),$$ MÁ-LI P.S. SMYSL

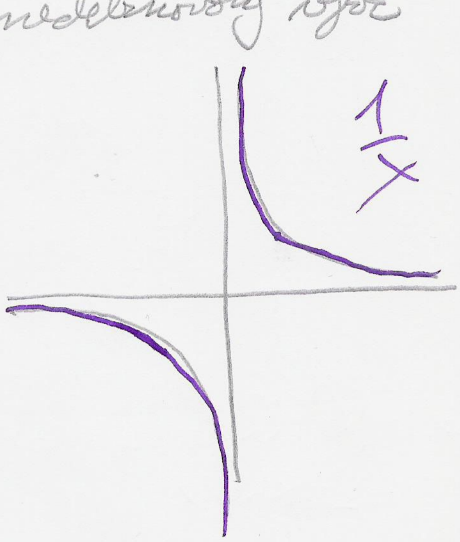
$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right),$$ —//—

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)},$$ —//—

$\boxed{\text{Důležitý příklad}}$ $f(x)=\frac{1}{x}$, $D_f=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$ pokud $x_0\in D_f$, např. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$

„vždy zkusíme dosadit, pokud nedostaneme nedefinovaný výraz jsme hotovi"



$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

„podobné jako vlastní limit posloupnosti"

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0_-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_-}=-\infty$$

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$ Určete D_f, spočítejte limity v krajních bodech D_f.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} \underset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

$\frac{5}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

C) $\lim\limits_{x\to1_+} \dfrac{x+5}{x-1} = \dfrac{6}{0_+} = +\infty$

dosadil

(x−1) se blíží k 0 zprava

1 — blížím se k 1 zprava

1,01 1,1

0 0,01 0,1

D) $\lim\limits_{x\to1_-} \dfrac{x+5}{x-1} = \dfrac{6}{0_-} = -\infty$

(x−1) se blíží k 0 zleva

1 — blížím se k 1 zleva

0.9 0.99

−0,1 −0,01 0

E) C) + D) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+5}{x-1}$ NEEXISTUJE

$\boxed{P2}$ $f(x)=\dfrac{3x^2+3}{4-x}$, $D_f=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+3}{4-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}\left(3+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{4}{x}-1\right)}\underset{\text{VOAL}}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1}\right)=$

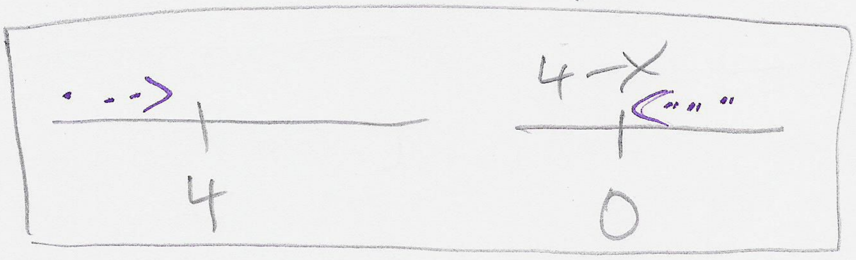
$=+\infty\cdot\left(\dfrac{3+0}{0-1}\right)=+\infty\cdot(-3)=-\infty$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+3}{4-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}\right)}{x\left(\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1\right)}\underset{\text{VOAL}}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-1}\right)\underset{\text{VOAL}}{=}$

$\underset{\text{VOAL}}{=}-\infty\cdot\left(\dfrac{3+0}{0-1}\right)=-\infty\cdot(-3)=+\infty$

C) $\lim\limits_{x\to4_+}\dfrac{3x^2+3}{4-x}=\dfrac{3\cdot16+3}{0_-}=\dfrac{51}{0-}=-\infty$

D) $\lim\limits_{x\to4_-}\dfrac{3x^2+3}{4-x}=\dfrac{3\cdot16+3}{0+}=\dfrac{51}{0+}=+\infty$



E) C) + D) $\Rightarrow\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2+3}{4-x}$ NEEXISTUJE

$\boxed{PŘ}$ $f(x) = \frac{3x-5}{x^2}$, $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(3-\frac{5}{x})}{x^{\cancel{2}}} \overset{VOAL}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) \overset{VOAL}{=}$

$= 0 \cdot (3-0) = 0 \cdot 3 = 0$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(3-\frac{5}{x})}{x^{\cancel{2}}} \overset{VOAL}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) \overset{VOAL}{=}$

$= 0 \cdot (3-0) = 0 \cdot 3 = 0$

C) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{3x-5}{x^2} = \frac{-5}{0+} = -\infty$

D) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{3x-5}{x^2} = \frac{-5}{0+} = -\infty$

E) C) + D)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-5}{x^2} = -\infty$

ZDE EXISTUJE

:)

$\boxed{PŘ}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8}$, $\underset{\geq 0}{x^2} + \underset{\geq 0}{6} \geq 0$ ← PLATÍ VŽDY

$D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{\cancel{x}(4-\frac{8}{x})} \overset{VOAL}{=} \frac{\sqrt{1+0}}{4-0} = \frac{1}{4}$

0 0

ŠPATNĚ

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \cancel{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{(4-\frac{8}{x})} \overset{VOAL}{=} \frac{\sqrt{1+0}}{4-0} = \frac{1}{4}}$

OPRAVA

C) $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \frac{\sqrt{10}}{0+} = +\infty$

B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{x\left(4-\frac{8}{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{x\left(4-\frac{8}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-\cancel{x})\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{\cancel{x}\left(4-\frac{8}{x}\right)} =$

JDUDO $-\infty$

$\Rightarrow |x| = -x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-1)\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{4-\frac{8}{x}} \underset{\text{LOAC}}{=} -\dfrac{1}{4}$

5b

D) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8} = \dfrac{\sqrt{10}}{0-} = -\infty$

E) C)+D) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+6}}{4x-8}$ NEEXISTUJE

$\boxed{\text{Př2}}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12}$

$3x^2-6x = 3x(x-2) \geq 0$

$\Downarrow$

$x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$

$D_f = (-\infty;0] \cup [2;12) \cup (12;+\infty)$

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{x\left(1-\frac{12}{x}\right)} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} =$ ~~$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{x\left(1-\frac{12}{x}\right)} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$~~

ŠPATNĚ

OPRAVA

C) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ NEMÁ SMYSL, f(x) není na pravém okolí 0 definována

D) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \dfrac{\sqrt{0}}{-12} = 0$

dosadil

E) $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \dfrac{\sqrt{0}}{-12} = 0$

dosadil

F) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ NEMÁ SMYSL, f(x) není na levém okolí 2 definována

G) $\lim\limits_{x\to 12+} f(x) = \dfrac{\sqrt{3\cdot144-6\cdot12} > 0}{0+} = +\infty$

H) $\lim\limits_{x\to 12-} f(x) = \dfrac{\sqrt{3\cdot144-6\cdot12} > 0}{0-} = -\infty$

G)+H) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 12} f(x)$ NEEX.

B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{x\left(1-\frac{12}{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{x\left(1-\frac{12}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-\cancel{x})\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{12}{x}\right)} =$

BLÍŽÍME SE
K $-\infty$
$\Rightarrow |x| = -x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-1)\sqrt{3-\frac{6}{x}}}{\left(1-\frac{12}{x}\right)} \underset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{-\sqrt{3-0}}{1-0} = -\sqrt{3}$

6

$\boxed{\text{Př}}$ (POUZE S VÝSLEDKY)

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	-1_+	-1_-	-1
=	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{4}_+$	$\frac{1}{4}_-$	$\frac{1}{4}$
=	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX

3) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	-2_+	-2_-	2_+	2_-	-2	2
=	3	3	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX	NEEX

4) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

limita v	$+\infty$	$-\infty$	-1_+	-1_-	1_+	1_-	-1	1
=	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	NEEX	NEEX