5. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

dropbox, lvl testů, feedback

Geogebra .

Opakování z přednášky

- **Funkce** - předpis funkce, prostá funkce, složená funkce, definiční obor funkce
- - **Limita funkce** -(obrázková verze zde) ve vlastním nebo nevlastním bodě, podobnost s limitami posloupností. Jednostranné limity. Spojitá funkce.

Známé limity

(I) $\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$

(II) $\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$

(III) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

(IV) $\lim_{x \to +\infty} x,\, x^2,\, x^3 = +\infty$

(V) $\lim_{x \to -\infty} x,\, x^3,\, x^5 = -\infty$

(VI) $\lim_{x \to -\infty} x^k - x^l = \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } k > l \\ -\infty, & \text{pokud } k < l \end{cases}$

(VII) Pokud $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$, pak můžeme psát, že:

- $\lim_{x \to A} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ pro libovolné $k > 1$.
- $\lim_{x \to A} \frac{1}{\sqrt[k]{f(x)}} = 0$ pro libovolné $k > 1$.

Pravidla počítání limit - Obecně lze s limitami počítat jako s normálními čísly, **kromě případů**

- $\infty - \infty$;
- $0/\pm\infty$;
- $\pm\infty/\pm\infty$.
- limita složené funkce v krajních bodech definičního oboru vnnitřní funkce

Konkrétní pravidla, která platí **mimo případy výše**:

(P0) a $\lim_{x \to A} f(x) = f(A)$, **pokud** A **patří do definičního oboru** D_f.

b $\lim_{x \to A} f(x) = L$ **právě tehdy, když platí** $\lim_{x \to A_-} f(x) = L$ **a zároveň** $\lim_{x \to A_+} f(x) = L$

(P1) $\lim_{x\to A}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to A} f(x) + \lim_{x\to A} g(x)$;

(P2) $\lim_{x\to A}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to A} g(x)$;

(P3) $\lim_{x\to A}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to A} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to A} g(x)\right)$;

(P4) $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to A} f(x)}{\lim_{x\to A} g(x)}$, pokud $\lim_{x\to A} g(x) \neq 0$.

(P5) $\lim_{x\to A} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to A} g(x)\right)$, pokud $\lim_{x\to A} g(x)$ patří do definičního oboru funkce f.

Trik 1 Rozklad na součin - lomennou funkci převedeme na součinový tvar a zkrátíme shodné členy. Tím funkci zjednodušíme a můžeme zvětšit definiční obor a použít (P0). Je důležité znát vzorce na rozklad

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a\pm b)^2$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $ax^2+bx+cx = a(x-r_1)(x-r_2)$, kde r_1, r_2 jsou kořeny (roots) kvadratické rovnice $ax^2+bx+cx=0$.

Trik 2 Vytýkání v polynomech stejně jako u limit - použijeme známé limity $(IV),(V),(VI)$ - ale pozor **v jakém bodě limitíme** - používáme jen pokud $x\to\pm\infty$.

Trik 3 Posunutí známých limit $(I),(II)$ - tedy pro libovolné reálné číslo $r\in\mathbb{R}$ ze známých limit $(I),(II)$ lze dostat i platnost:

$$\lim_{x\to r_+}\frac{1}{x-r} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to r_-}\frac{1}{x-r} = -\infty.$$

Výpočet limit U následujích funkcí určete definiční obor a vypočtěte limity daných funkcí v jeho krajních bodech. Nezapoměňte na $\pm\infty$. ***Snažte se nad každé rovnítko/úpravu sami pro sebe psát zdůvodnění ve smyslu odvolávání se na jedno z pravidel výše.***

i $f(x) = \frac{-1}{x+3}$

ii $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$

iii $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$

iv $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$

v $f(x) = \frac{13x-5}{-1-x^3}$

vi $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+9}$

vii $f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$

viii $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

ix $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x}$

x $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$

xi $f(x) = \sqrt{x-5}$

xii $f(x) = \sqrt{-3x+9}$

xiii $f(x) = \sqrt{x^2-36}$

xiv $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}$

xv $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-6}}{x-12}$

xvi $f(x) = \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}}$

xvii $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2-2x}$

Řešení

i $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ - definiční obor $D_f = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -3; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+3} \overset{(III)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to-3_-} \frac{-1}{x+3} = -\lim\limits_{x\to-3_-} \frac{1}{x+3} \overset{(II)}{=} -(-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3_+} \frac{-1}{x+3} = -\lim\limits_{x\to-3_+} \frac{1}{x+3} \overset{(II)}{=} -(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3} \frac{-1}{x+3} \overset{\text{Trik 3 + (P0a)}}{=}$ neexistuje
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+3} \overset{(III)}{=} 0$

ii $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$ - definiční obor $D_f = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -2; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{2x+4} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\frac{1-2/x}{2+4/x} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} \frac{1-0}{2+0} = 1/2$
- $\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{x-2}{2x+4} \overset{(P1)-(P4)}{=} \left(\lim\limits_{x\to-2_-} x-2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{2x+4}\right) \overset{(P0b)}{=} (-4) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{2x+4}\right) \overset{(II)}{=} = (-4)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2_+} \frac{x-2}{2x+4} \overset{(P1)-(P4)}{=} \left(\lim\limits_{x\to-2_+} x-2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_+} \frac{1}{2x+4}\right) \overset{(P0b)}{=} (-4) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_+} \frac{1}{2x+4}\right) \overset{(I)}{=} = (-4)\cdot(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x-2}{2x+4} \overset{\text{Trik 3 + výše}}{=}$ neexistuje
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{2x+4} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x}\frac{1-2/x}{2+4/x} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} \frac{1-0}{2+0} = 1/2$

iii $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$ - definiční obor $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 0; +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^2} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2}\frac{1-2/x}{1} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) \frac{1-0}{1} \overset{(III)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to0_-} \frac{x-2}{x^2} \overset{(P1)-(P4)}{=} \left(\lim\limits_{x\to0_-} x-2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{x^2}\right) \overset{(P0b)}{=} (-2) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{x^2}\right) \overset{(II)}{=} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0_+} \frac{x-2}{x^2} \overset{(P1)-(P4)}{=} \left(\lim\limits_{x\to0_+} x-2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to0_+} \frac{1}{x^2}\right) \overset{(P0b)}{=} (-4) \cdot \left(\lim\limits_{x\to0_+} \frac{1}{x^2}\right) \overset{(II)}{=} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-2}{x^2} \overset{\text{Trik 3 + výše}}{=} -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2}\frac{1-2/x}{1} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\right) \frac{1-0}{1} \overset{(III)}{=} 0$

iv $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (-2;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;-2;2;+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{3}{1-4/x^2} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (1)\, \frac{3}{1-0} = 3$
- $\lim\limits_{x\to-2_-} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to-2_-} 3x^2}{\lim\limits_{x\to-2_-}(x-2)} \cdot \lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{x+2} \overset{(P0b)}{=} \frac{3\cdot(-2)^2}{-4} \cdot \lim\limits_{x\to-2_-} \frac{1}{x+2} \overset{(II)}{=} = (\frac{12}{-4}) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2_+} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to-2_+} 3x^2}{\lim\limits_{x\to-2_+}(x-2)} \cdot \lim\limits_{x\to-2_+} \frac{1}{x+2} \overset{(P0b)}{=} \frac{3\cdot(-2)^2}{-4} \cdot \lim\limits_{x\to-2_+} \frac{1}{x+2} \overset{(I)}{=} = (\frac{12}{-4}) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 3 + výše}}{=}$ neexistuje
- $\lim\limits_{x\to2_-} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to2_-} 3x^2}{\left(\lim\limits_{x\to2_-}(x+2)\right)} \cdot \lim\limits_{x\to2_-} \frac{1}{x-2} \overset{(P0b)}{=} \frac{3\cdot(2)^2}{4} \cdot \lim\limits_{x\to2_-} \frac{1}{x-2} \overset{(II)}{=} = (\frac{12}{4}) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2_+} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to2_+} 3x^2}{\lim\limits_{x\to2_+}(x+2)} \cdot \lim\limits_{x\to2_+} \frac{1}{x-2} \overset{(P0b)}{=} \frac{3\cdot(-2)^2}{4} \cdot \lim\limits_{x\to2_+} \frac{1}{x-2} \overset{(I)}{=} = (\frac{12}{4}) \cdot (+\infty) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to2} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 3 + výše}}{=}$ neexistuje
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{3}{1-4/x^2} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (1)\, \frac{3}{1-0} = 3$

v $f(x) = \frac{13x-5}{-1-x^3}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;-1;+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x-5}{-1-x^3} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} \frac{13-5/x}{1+1/x^3} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (0)\, \frac{13}{-1-0} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-1_-} \frac{13x-5}{-1-x^3} = -\lim\limits_{x\to-1_-} \frac{13x-5}{1+x^3} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} -\frac{\lim\limits_{x\to-1_-} 13x-5}{\lim\limits_{x\to-1_-}(x^2-x+2)} \cdot \left(\lim\limits_{x\to-1_-} \frac{1}{(x+1)}\right) \overset{(P0b)}{=} \frac{13\cdot(-1)+5}{(1-(-1)+1} \cdot \lim\limits_{x\to-1_-} \frac{1}{x+1} \overset{(II)}{=} = (\frac{-8}{3}) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1_+} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{(P1)-(P4),\text{Trik 1}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to-1_+} 3x^2}{\left(\lim\limits_{x\to-1_+}(x-2)\right)\left(\lim\limits_{x\to-1_+}(x+2)\right)} \overset{(P0b)}{=} \frac{3\cdot(-2)^2}{(-4)\cdot\left(\lim\limits_{x\to-12_+}(x+2)\right)} \overset{(I)}{=} = (\frac{12}{-4}) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 3 + výše}}{=}$ neexistuje
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{3}{1-4/x^2} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (1)\, \frac{3}{1-0} = 3$

vi $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+9}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2+9} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1-1/x^3}{1+9/x^2} \overset{(P1)-(P4),(IV)}{=} (+\infty)\, \frac{1-0}{1+0} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^2+9} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1-1/x^3}{1+9/x^2} \overset{(P1)-(P4),(V)}{=} (-\infty)\, \frac{1-0}{1+0} = -\infty$

vii $f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-4) \cup (-4;4) \cup (4;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -4; 4; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x^2-16} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1-4/x^2}{1-16/x^2} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (0)\, \frac{1-0}{1+0} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-4} \frac{x-4}{x^2-16} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{x\to-4} \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to-4} \frac{1}{x+4} \overset{\text{Trik 3}}{=} \begin{cases} -\infty, & x \to -4_- \\ +\infty, & x \to -4_+ \end{cases}$ Celkem tedy limita neexistuje podle (P0b).
- $\lim\limits_{x\to+4} \frac{x-4}{x^2-16} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{x\to+4} \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to+4} \frac{1}{x+4} \overset{(P0a)}{=} 1/8$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x^2-16} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1-4/x^2}{1-16/x^2} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (0)\, \frac{1-0}{1+0} = 0$

viii $f(x) = \frac{1-x^2}{x+1}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -1; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x+1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{-1+1/x^2}{1+1/x} \overset{(P1)-(P4),(IV)}{=} (+\infty)\, \frac{-1+0}{1+0} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1-x^2}{x+1} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{x\to-1} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1-x}{1} \overset{(P0a)}{=} 2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x+1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{-1+1/x^2}{1+1/x} \overset{(P1)-(P4),(V)}{=} (-\infty)\, \frac{-1+0}{1+0} = +\infty$

ix $f(x) = \frac{x^2-5x}{3x}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 0; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{3x} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1-5/x}{3} \overset{(P1)-(P4),(IV)}{=} (+\infty)\, \frac{1-0}{3} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-5x}{3x} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x(x-5)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x-5}{3} \overset{(P0a)}{=} -5/3$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x}{3x} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1-5/x}{3} \overset{(P1)-(P4),(V)}{=} (-\infty)\, \frac{1-0}{3} = -\infty$

x $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -1; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^3+1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} \cdot \frac{1+1/x}{1+1/x^3} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (0)\, \frac{1+0}{1+0} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{x+1}{x^3+1} \overset{\text{Trik 1}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2-x+1} \overset{(P0a)}{=} 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^3+1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3} \cdot \frac{1+1/x}{1+1/x^3} \overset{(P1)-(P4),(III)}{=} (0)\, \frac{1+0}{1+0} = 0$

xi $f(x) = \sqrt{x-5}$ - definiční obor $D_f = \langle 5;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $5; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-5}\overset{(VII)}{=}+\infty$, protože vnitřní funkce je zde $g(x)=x-5$ a platí $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to5_+}\sqrt{x-5}\overset{(P5)}{=}\sqrt{\lim\limits_{x\to5_+}x-5}=\sqrt{0}=0$. V tomto případě používáme pravidlo (P5) pro vnější funkci $y\mapsto\sqrt{y}$ a vnitřní funkci $x\mapsto x-5$.
- $\lim\limits_{x\to5_-}\sqrt{x-5}$ neexistuje, protože ***pro čísla menší než 5 f není definováno!***
- $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-5}$ neexistuje, protože jsme výše ukázali, že $\lim\limits_{x\to5_-}\sqrt{x-5}$ neexistuje a můžeme použít (P0b).

xii $f(x)=\sqrt{-3x+9}$ - definiční obor $D_f=(-\infty;-3\rangle$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;-3$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-3x+9}\overset{(VII)}{=}+\infty$, protože vnitřní funkce je zde $g(x)=-3x-9$ a platí $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-3_-}\sqrt{-3x+9}\overset{(P5)}{=}\sqrt{\lim\limits_{x\to-3_-}-3x-9}=\sqrt{0}=0$. V tomto případě používáme pravidlo (P5) pro vnější funkci $y\mapsto\sqrt{y}$ a vnitřní funkci $x\mapsto-3x-9$.
- $\lim\limits_{x\to-3_+}\sqrt{-3x-9}$ neexistuje, protože ***pro čísla větší než -3 f není definováno!***
- $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{-3x-9}$ neexistuje, protože jsme výše ukázali, že $\lim\limits_{x\to-3_+}\sqrt{-3x-9}$ neexistuje a můžeme použít (P0b).

xiii $f(x)=\sqrt{x^2-36}$ - definiční obor $D_f=(-\infty;-6\rangle\cup\langle6;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;-6;6;+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-36}\overset{(VII)}{=}+\infty$, protože vnitřní funkce je zde $g(x)=x^2-36$ a platí $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-6}\sqrt{x^2-36}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "napravo od -6".
- $\lim\limits_{x\to6}\sqrt{x^2-36}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "nalevo od 6".
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-36}\overset{(VII)}{=}+\infty$, protože vnitřní funkce je zde $g(x)=x^2-36$ a platí $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

xiv $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}$ - definiční obor $D_f=(-\infty;1/4)\cup(1/4;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty;1/4;+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}\overset{\text{Trik 2}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4}}{x}\frac{\sqrt{1+5/x^4}}{4-1/x}\overset{(P1)-(P5)}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\right)\cdot\frac{\sqrt{1+0}}{4-0}\overset{(IV)}{=}+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to1/4}\frac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1}\overset{(P1-P5)}{=}\left(\lim\limits_{x\to1/4}\sqrt{x^4+5}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to1/4}\frac{1}{4x-1}\right)\overset{(P0a)}{=}\left((1/4)^4+5\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to1/4}\frac{1}{4x-1}\right)\overset{\text{Trik 3}}{=}$
  $\begin{cases}-\infty, & x\to\frac{1}{4}_-\\ +\infty, & x\to\frac{1}{4}_+\end{cases}$ Celkem tedy limita neexistuje podle (P0b).

– $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+5}}{4x-1} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4}}{x}\frac{\sqrt{1+5/x^4}}{4-1/x} \overset{(P1)-(P5)}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} x\right)\cdot\frac{\sqrt{1+0}}{4-0} \overset{(IV)}{=} -\infty.$

xv $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;0\rangle \cup \langle 2;12) \cup (12;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 0; 2; 12; +\infty$

– $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}\frac{\sqrt{3-6/x}}{1-12/x} \overset{(P1)-(P5)}{=} \frac{\sqrt{3-0}}{1-0} = \sqrt{3}.$

– $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "napravo od 0". Lze spočíst $\lim\limits_{x\to0_-}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} = 0.$

– $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "nalevo od 2". Lze spočíst $\lim\limits_{x\to2_+}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} = 0.$

– $\lim\limits_{x\to12}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} \overset{(P1-P5)}{=} \left(\lim\limits_{x\to12}\sqrt{3x^2-6x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to12}\frac{1}{x-12}\right) \overset{(P0a)}{=} \sqrt{3(12)^2-6\cdot12}\cdot\left(\lim\limits_{x\to12}\frac{1}{x-12}\right) \overset{\text{Trik 3}}{=} \begin{cases} -\infty, & x\to12_- \\ +\infty, & x\to12_+ \end{cases}$ Celkem tedy limita neexistuje podle (P0b).

– $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-6x}}{x-12} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}\frac{\sqrt{3-6/x}}{1-12/x} \overset{(P1)-(P5)}{=} \frac{\sqrt{3-0}}{1-0} = \sqrt{3}.$

xvi $f(x) = \frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}}$ - definiční obor $D_f = (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; -2; 2; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{4-5/x}{\sqrt{1-4/x^2}} \overset{(P1)-(P5)}{=} \frac{4-0}{\sqrt{1-0}} = 4.$

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "napravo od -2". Lze spočíst $\lim\limits_{x\to-2_-}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty.$

- $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}}$ neexistuje, protože stejně jako výše vidíme, že funkce f není definována pro čísla "nalevo od 2". Lze spočíst $\lim\limits_{x\to2_+}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-4}} \overset{\text{Trik 2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{4-5/x}{\sqrt{1-4/x^2}} \overset{(P1)-(P5)}{=} \frac{4-0}{\sqrt{1-0}} = 4$