7. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

l'Hospitallovo pravidlo

Opakování z přednášky **K čemu to je?** - pomůže nám to vypočítat limity, které bychom jinak neuměli spočítat.
Jak to funguje? - když máme spočítat limitu funkce f,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

která je napsána jako podíl dvou jiných funkcí g_1, g_2 a po dosazení limitního bodu a vyjde "$f(a) = \frac{0}{0}$"nebo "$f(a) = \frac{\text{číslo}}{\pm\infty}$", pak můžeme limitu výše spočítat jako

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)},$$

tedy můžeme limitu ekvivalentně spočítat jako **limitu podílu derivací** místo **limitu podílu funkcí**. ***Lze použít, pouze pokud limita derivací existuje. Pokud nexistuje, původní limita existovat může.***Jeden konkrétní příklad zde (nejprve se podívejte na popisky vlevo).

Příklady Spočtěte následující limity pomocí l'Hospitalova pravidla a porovnejte s kalsickým postupem počítání limit.

i $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

ii $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{1-3x^2}$

iii $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{1-x}$

iv $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x}$

v $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

vi $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x}{x^2-1}$

vii $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}(x^4-1)$

viii $\lim\limits_{x\to 1_+} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$

Řešení

i $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$

ii $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{1-3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{-6x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-3} = \frac{1}{-3}$

iii $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{10x^9}{-1} = -10$

iv $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1$

v $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

vi $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x} = \frac{e}{2}$

vii $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}(x^4-1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-1}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{24x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{24}{e^x} = 0$

viii $\lim_{x\to 1_+} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1/(x-1)}{0.5\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x-1} \frac{2\sqrt{x-1}}{1} = \lim_{x\to 1_+} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Tečna ke grafu funkce

Opakování z přednášky **K čemu to je?** - umožní nám to spočítat/určit **tečnu k funkci** f **v bodě** x_0 - označme tuto tečnu jako přímku $p(x) = ax + b$. Pokud budeme hodně blízko u bodu x_0, bude ta tečna dobrá aproximace funkce f - nebo-li $f(x) \approx p(x)$ pokud $x \approx x_0$.
Jak to funguje? - když chceme určit tu vytouženou přímku $p(x) = ax + b$, stačí přece určit koeficienty a, b. **Připomeňme si, že ta přímka je tečna v bodě** $[x_0; f(x_0)]$.

- Pro spočtení koeficientu a stačí použít $a = f'(x_0)$. Tedy stačí spočíst první derivaci f v bodě x_0. motivační video.
- Pro spočtení koeficientu b je důležité, že chceme aby přímka p byla tečna - tedy musí platit, že $f(x_0) = p(x_0)$. Tedy lze dopočítat z rovnice $p(x_0) = f(x_0)$ nebo-li z $f(x_0) = ax_0 + b$, kde známe bod x_0, koeficient a a spočteme si $f(x_0)$ ze zadání.

Výpočet tečny ke grafu funkce Spočtěte tečny ke grafům daných funkcí v daných bodech. Pokuste se o "lokální náčrtek".

i $f(x) = x^3 - 12x + 10$ v bodech $\{0, 2, -1\}$;

ii $f(x) = x^2 - 7x + 1$ v bodech $\{1, -2, 10\}$;

iii $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ v bodech $\{1, -2, 0\}$;

iv $f(x) = e^{1-x^2}$ v bodech $\{1, -2, 0\}$;

vi $f(x) = \frac{x-3x^2}{e^x}$ v bodech $\{1, 0\}$.
U následujících funkcí je zadáno navíc reálné číslo a. Najděte všechny body z definičního oboru D_f, pro které má tečna ke grafu dané funkce směrnici a.

vii $f(x) = 1 - x^2$ pro směrnici tečny $a = 1$;

viii $f(x) = 22 - 45x - 3x^2 + x^3$ pro směrnici tečny $a = 0$;

ix $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pro směrnici tečny $a = -8$;

x $f(x) = e^x(x^4 - x)$ pro směrnici tečny $a = -1$;

xi $f(x) = -x^2 + 4x + 21$ pro směrnici tečny $a = 6$.

Řešení Pro kontrolu správnosti grafu doporučuji použít wolframalpha.com.

i $f(x) = x^3 - 12x + 10$ v bodech $\{0, 2, -1\}$;

- derivace vyjde jako $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$x_0 = 0$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -12$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $10 = -12 \cdot 0 + b$ dostaneme, že $p(x) = -12x + 10$;

$x_0 = 2$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 0$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $-6 = 0 \cdot 2 + b$ dostaneme, že $p(x) = -6$;

$x_0 = -1$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -9$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $21 = (-9) \cdot (-1) + b$ dostaneme, že $p(x) = -9x + 12$;

ii $f(x) = x^2 - 7x + 1$ v bodech $\{1, -2, 10\}$;

– derivace vyjde jako $f'(x) = 2x - 7$.

$x_0 = 1$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -5$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $-4 = -5 \cdot 1 + b$ dostaneme, že $p(x) = -5x + 1$;

$x_0 = 2$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -3$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $-9 = (-6) \cdot 2 + b$ dostaneme, že $p(x) = -3x - 3$;

$x_0 = 10$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 13$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $31 = 13 \cdot 10 + b$ dostaneme, že $p(x) = 13x - 99$;

iii $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ v bodech $\{1, -2, 0\}$;

– derivace vyjde jako $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

$x_0 = 0$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 0$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $0 = 0 \cdot 0 + b$ dostaneme, že $p(x) = 0$ (tj. tečna v bodě $x_0 = 0$ splývá s osou x);

$x_0 = -2$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -4/5$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $\ln(5) = (-0.8) \cdot (-2) + b$ dostaneme, že $p(x) = -0.8x + \ln(5) - 1.6$;

$x_0 = 1$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 1$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $1 = 1 \cdot 1 + b$ dostaneme, že $p(x) = x$;

iv $f(x) = e^{1-x^2}$ v bodech $\{1, -2, 0\}$;

– derivace vyjde jako $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$x_0 = 0$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -12$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $10 = -12 \cdot 0 + b$ dostaneme, že $p(x) = -12x + 10$;

$x_0 = 2$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 0$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $-6 = 0 \cdot 2 + b$ dostaneme, že $p(x) = -6$;

$x_0 = -1$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -9$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $21 = (-9) \cdot (-1) + b$ dostaneme, že $p(x) = -9x + 12$;

vi $f(x) = \frac{x-3x^2}{e^x}$ v bodech $\{1, 0\}$.

– derivace vyjde jako $f'(x) = e^x(x - 3x^2) + e^x(1 - 6x) = e^x(-3x^2 - 5x + 1)$.

$x_0 = 1$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = -7e$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $(-2e) = (-7e) \cdot 1 + b$ dostaneme, že $p(x) = -7ex + 5e$;

$x_0 = 0$ snadno vidíme, že $a = f'(x_0) = 1$. Dále z rovnice $f(x_0) = ax_0 + b$ nebo-li $0 = 1 \cdot 0 + b$ dostaneme, že $p(x) = x$;

U následujících funkcí je zadáno navíc reálné číslo a. Najděte všechny body z definičního oboru D_f, pro které má tečna ke grafu dané funkce směrnici a.

vii $f(x) = 1 - x^2$ pro směrnici tečny $a = 1$;

- snadno spočteme deriavci jako $f'(x) = -2x$;
- víme, že pro tečnu $p(x) = ax + b$ ke grafu funkce f v bodě x_0 platí $a = f'(x_0)$. Tedy v libovolném bodě $x_0 \in D_f$ platí $a = 2x_0$ a tedy máme jedinný bod splňující zadání - $x_0 = 0.5$;

viii $f(x) = 22 - 45x - 3x^2 + x^3$ pro směrnici tečny $a = 0$;

- snadno spočteme deriavci jako $f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$;
- víme, že pro tečnu $p(x) = ax + b$ ke grafu funkce f v bodě x_0 platí $a = f'(x_0)$. Tedy v libovolném bodě $x_0 \in D_f$ platí $a = 3x_0^2 - 6x_0 - 45$ a tedy hledané body odpovídají řešením kvadratické rovnice $3x^2 - 6x - 45 = 0$ a tedy máme dvě řešení - $x_0 = 5$ a $x_0 = -3$;

ix $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pro směrnici tečny $a = -8$;

- snadno spočteme deriavci jako $f'(x) = 6x - 4$;
- víme, že pro tečnu $p(x) = ax + b$ ke grafu funkce f v bodě x_0 platí $a = f'(x_0)$. Tedy v libovolném bodě $x_0 \in D_f$ platí $a = 6x_0 - 4$ a tedy máme jedinný bod splňující zadání - $x_0 = 2/3$;

x $f(x) = e^x(x^3 - x)$ pro směrnici tečny $a = -1$;

- snadno spočteme deriavci jako $f'(x) = e^x(x^3 - x) + e^x(3x^2 - 1) = e^x(x^3 + 3x^2 - x - 1)$;
- víme, že pro tečnu $p(x) = ax + b$ ke grafu funkce f v bodě x_0 platí $a = f'(x_0)$. Tedy v libovolném bodě $x_0 \in D_f$ platí $a = e^x(x_0^3 + 3x_0^2 - x_0 - 1)$ a tedy máme jedinný bod splňující zadání - $x_0 = 0$;