6. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Opakování z přednášky - limity exponenciály a logaritmu

Definice - řekneme, že $\log_a(x) = y$ pokud platí $a^y = x$. Nebo-li "číslo $\log_a(x) = y$ udává, na kolikátou musíme umocnit a, abychom dostali x". Logaritmus a exponenciála jsou navzájem ***inverzní funkce***. Vždy uvažujeme $a \in (0, +\infty) - \{1\}$.

Vlastnosti/vzorečky

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ z čehož odvodíme $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$;
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ z čehož odvodíme $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$ z čehož odvodíme $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$;
- $a^x = b^{x \log_b(a)}$;

Limity - z grafu vidíme, že následující platí:

1 $$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } a \in (1, +\infty); \\ 0, & \text{pokud } a \in (0, 1); \end{cases}$$

2 $$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } a \in (1, +\infty); \\ -\infty, & \text{pokud } a \in (0, 1); \end{cases}$$

3 $$\lim_{x \to 0_+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{pokud } a \in (1, +\infty); \\ +\infty, & \text{pokud } a \in (-1, 1); \end{cases}$$

Limity s polynomy - lze ukázat, že že platí několik důležitých pravidel pro počítání limit funkcí, které jsou složeny z logariitmu, exponenciely a polynomů. Jednoduše je můžeme shrnout jako "exponenciela se základem $a \in (1, +\infty)$ roste v nekonečnu rychleji než libovolný polynom a libovolný polynom roste v nekonečnu rychleji než libovolná mocnina logaritmu se základem $a \in (1, +\infty)$".

4 $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$, pro libovolné $a \in (1, +\infty),\ n \in \mathbb{N}$;

5 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$, pro libovolné $a \in (1, +\infty),\ n \in \mathbb{N}$;

6 $\lim_{x \to 0_+} x^n \log_a^m(x) = 0$, pro libovolné $a \in (1, +\infty),\ n, m \in \mathbb{N}$;

6 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^{x^m} = 0$, pro libovolné $a \in (1,+\infty)$, $n, m \in \mathbb{N}$;

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\log_a^m(x)} = +\infty$, pro libovolné $a \in (1,+\infty)$, $n, m \in \mathbb{N}$;

8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a^m(x)}{x^n} = 0$, pro libovolné $a \in (1,+\infty)$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Počítání limit I - budeme používat znalost limit polynomů a jejich podílu a zároveň pravidlo o limitě složené funkce. Tedy hlavním trikem bude vhodné použití následujícího pravidla (vizuaizace):

Trik 1 $\lim\limits_{x\to A} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to A} g(x)\right)$, pokud $\lim\limits_{x\to A} g(x)$ patří do definičního oboru funkce f nebo pokud $\lim\limits_{x\to A} g(x) = \pm\infty$.

Počítání limit II - pokročilí - doposud jsme ve zlomcích vždy vytýkali **nejvyšší mocninu** ve jmenovateli i čitateli. To proto, že nejvyšší mocnina představovala nejrychleji rostoucí složku u nekonečna a tudíž zbylé členy v čitateli (respektive ve jmenovateli) šli k nule. To samé můžeme použít i zde. Pouze musíme do pomyslné "škály" zahrnout nové dva členy - exponencielu a logaritmus. **Pro základ** $a \in (1,+\infty)$ **můžeme použít:**

Trik 2 Logaritmus je pomalajší než libovolná mocnina - a tedy z dvojice "polynom + logaritmus" vždy vyktneme nejvyšší mocninu a zbytek půjde k nule;

Trik 3 Exponenciela je rychlejší než libovolná mocnina - a tedy z dvojice "polynom + exponenciela" vždy vyktneme exponencielu a zbytek půjde k nule.

Exponenciála a logaritmus v limitách U následujích funkcí určete definiční obor a vypočtěte limity daných funkcí v jeho krajních bodech. Nezapoměňte na $\pm\infty$. ***Snažte se nad každé rovnítko/úpravu sami pro sebe psát zdůvodnění ve smyslu odvolávání se na jedno z pravidel výše.***

i $f(x) = \frac{-1}{3^x}$

ii $f(x) = \frac{4^x}{3^x}$

iii $f(x) = \log(3x - 8)$

iv $f(x) = \log_3(x^2)$

v $f(x) = \ln(x - 38)$

vi $f(x) = (-x^2 + 3x)\log(x^2)$

vii $f(x) = e^{2x-5}$

viii $f(x) = e^{1-x^2}$

ix $f(x) = x^3 e^{x-65}$

Řešení

i $f(x) = \frac{-1}{3^x}$ - definiční obor $D_f = (-\infty; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^x \stackrel{(1)}{=} 0;$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{3^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -3^{-x} \stackrel{Trik1}{=} -\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = -\infty.$

ii $f(x) = \frac{4^x}{3^x}$ - definiční obor $D_f = (-\infty; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x \stackrel{(1)}{=} +\infty;$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} \stackrel{Trik1}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = -x$.

iii $f(x) = \log(3x - 8)$ - definiční obor $D_f = (8/3; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $8/3; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(3x - 8) = +\infty;$
- $\lim\limits_{x\to 8/3_+} \log(3x - 8) \stackrel{Trik1}{=} \lim\limits_{y\to 0_+} \log(y) \stackrel{(3)}{=} -\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \log(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 3x - 8$.
- Protože nalevo od 8/3 není naše funkce definovaná, neexistuje $\lim\limits_{x\to 8/3_-} \log(3x - 8)$ a tudíž ani $\lim\limits_{x\to 8/3} \log(3x - 8)$.

iv $f(x) = \log_3(x^2)$ - definiční obor $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 0; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_3(x^2) \stackrel{Trik1}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \log_3(y) = +\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \log_3(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x^2$.

- $\lim_{x\to 0_+} \log_3(x^2) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to 0_+} \log_3(y) = -\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \log_3(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x^2$.
- $\lim_{x\to 0_-} \log_3(x^2) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to 0_+} \log_3(y) = -\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \log_3(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x^2$.
- Dohromady lze psát $\lim_{x\to 0} \log_3(x^2) = -\infty$;
- $\lim_{x\to -\infty} \log_3(x^2) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to +\infty} \log_3(y) = +\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \log_3(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x^2$.

v $f(x) = \ln(38 - x)$ - definiční obor $D_f = (-\infty; 38)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 38$

- $\lim_{x\to -\infty} \ln(38-x) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to +\infty} \ln(38+y) = +\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \ln(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 38 - x$.
- $\lim_{x\to 38_-} \ln(38-x) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to 0_+} \log(y) \overset{(3)}{=} -\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = \ln(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 38 - x$.
- Protože napravo od 380 není naše funkce definovaná, neexistuje $\lim_{x\to 38_+} \ln(38-x)$ a tudíž ani $\lim_{x\to 38} \ln(38-x)$.

vi $f(x) = (-x^2 + 3x)\log(x^2)$ - definiční obor $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; 0; +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} (-x^2+3x)\log(x^2) = \left(\lim_{x\to +\infty} (-x^2+3x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to +\infty} \log(x^2)\right) \overset{jakove}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
- $\lim_{x\to 0_+} (-x^2+3x)\log(x^2) \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to 0_+} (-y + 3\sqrt{y})\log(y) \overset{(6)}{=} 0$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = (-x+3\sqrt{x})\log(x)$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x^2$.
- $\lim_{x\to -\infty} (-x^2+3x)\log(x^2) = \left(\lim_{x\to -\infty} (-x^2+3x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to -\infty} \log(x^2)\right) \overset{jakove}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;

vii $f(x) = e^{2x-5}$ - definiční obor $D_f = (-\infty + \infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} e^{2x-5} \overset{Trik1}{=} \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 2x - 5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-5} \overset{Trik1}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{y} = -\infty$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 2x-5$.

viii $f(x) = e^{1-x^2}$ - definiční obor $D_f = (-\infty + \infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x^2} \overset{Trik1}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 1 - x^2$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x^2} \overset{Trik1}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = 1 - x^2$.

ix $f(x) = x^3 e^{x-65}$ - definiční obor $D_f = (-\infty + \infty)$ a tedy musíme vyšetřit limity v bodech $-\infty; +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{x-65} = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0.1x-65}\right) \overset{(+)}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{x-65} \overset{Trik1,(7)}{=} 0$. Trik 1 jsme použili na vnější funkci $g_1(x) = (x+65)^3 e^x$ a vnitřní funkci $g_2(x) = x - 65$.

Opakování z přednášky - derivace

Definice & motivace - derivace představuje “rychlost a směr změny dané funkce”- příklad - *derivace rychlosti, je zrychlení* - tedy to jak moc se mění rychlost. Pěkné motivační video. Je důležité rozlišovat mezi **derivací funkce** f **v bodě** a (to jest číslem - značíme $f'(a)$) a ***derivací funkce jako takovou*** (to jest jinou funkcí - značíme f'). Obrázková verze

Vlastnosti/vzorečky I - teď si ukážeme několik základních vzorečků, pomocí kterých budeme schopni zderivovat skoro libovolnou funkci. Nejprve derivace známých “základních”funkcí

(I) Pro $f(x) = x^n$ máme $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ (porovnejte s motivací pro $\alpha = 1$ - rychlost změny je u funkce $f(x) = x$ rovna jedné - “funkce roste stejně rychle jak měníme vstup”);

(II) Pro $f(x) = konst$ máme $f'(x) = 0$ (porovnejte s motivací - rychlost změny je u konstantní funkce nulová);

(III) Pro $f(x) = e^x$ máme $f'(x) = e^x$ (toto je důvod, proč je eulerovo číslo e tak důležité);

(IV) Pro $f(x) = \ln(x)$ máme $f'(x) = \frac{1}{x}$ (toto je důvod, proč je eulerovo číslo e tak důležité);

(V) Pro $f(x) = a^x$ máme $f'(x) = a^x \ln(a)$ pro libovolné $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (porovnejte s případem $a = e$ - opravdu shodné s (III)?);

(VI) Pro $f(x) = \log_a(x)$ máme $f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$ pro libovolné $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (porovnejte s případem $a = e$ - opravdu shodné s (IV)?).

Vlastnosti/vzorečky II - abychom opravdu mohli derivovat hodně funkcí, musíme představit nějaká pravidla, stejně jako u limit.

(P1) $(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x)$;

(P2) $(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x)$;

(P3) $(Cf(x))' = Cf_1'(x)$;

(P4) $(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$;

(P5) $(\frac{f_1(x)}{f_2(x)})' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$ (obrázková verze);

(P6) $(f_1(f_2(x)))' = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$;

Derivace funkcí reálných čísel Pro následující funkce spočtěte derivace (funkce) a poté derivace v zadaných bodech (hodnoty). ***Snažte se nad každé rovnítko/úpravu sami pro sebe psát zdůvodnění ve smyslu odvolávání se na jedno z pravidel výše***.

i $f(x) = 3x^2 - 14$, body $\{10; 0; 1/2\}$;

ii $f(x) = -13x^8 - \frac{1}{3x^2}$, body $\{-1; 0; 1\}$;

iii $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}$, body $\{0; -1/2; 3\}$;

iv $f(x) = (2x - 3)(8 - 1/2x)$, body $\{-1; 3; 10\}$;

v $f(x) = (x^3 - 3)(x + 8)$, body $\{-1; 3; 0\}$;

vi $f(x) = e^x - 3x + 8$, body $\{-2; 3/2; 1\}$;

vii $f(x) = e^{x^8-3x+8}$, body $\{0; 1; -1\}$;

viii $f(x) = e^{x^3} \cdot e^{-3x+8}$, body $\{0; 1; -1\}$;

ix $f(x) = \ln(x - 33)$, body $\{33; 34\}$;

x $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, body $\{3; 0; -4\}$;

xi $f(x) = \sqrt{5^x + 11}$, body $\{1; 0; -2\}$;

Pro následující funkce spočtěte jejich derivace jako obecné funkce.

1 $f(x) = 13x^2 - x^5 + 4x - 536$;

2 $f(x) = \frac{3}{x^2} - x^{-4} + (x - 3)(44x^2 + 11x)$;

3 $f(x) = x^{-3/2} + \ln\left((3x + e^x)^3\right)$;

4 $f(x) = \frac{3x^2+2}{5x-1}$;

5 $f(x) = \ln(6x^2 - 5x + 1)$.

Řešení

i $f'(x) = 3(x^2)' - (14)' = 6x - 0 = 6x$. Tedy můžeme psát $f'(10) = 60$; $f'(0) = 0$; $f'(1/2) = 3$;

ii $f'(x) = -13(x^8)' - \left(\frac{1}{3x^2}\right)' = -13 \cdot 8x^7 - \frac{(1)' \cdot 3x^2 - 1 \cdot (3x^2)'}{(3x^2)^2} = -104x^7 - \frac{0 \cdot 3x^2 - 1 \cdot 6x}{(3x^2)^2} = -104x^7 - \frac{-6x}{9x^4} = -104x^7 + \frac{2x}{3x^4}$. Tedy můžeme psát $f'(-1) = 104 - 2/3$; $f'(0)$ - není definováno; $f'(1) = 2/3 - 104$;

iii $f'(x) = \left(\frac{3x-5}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x-5)'(x^2+1) - (3x-5)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - (3x-5)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+10x+3}{(x^2+1)^2}$. Tedy můžeme psát $f'(0) = 3$; $f'(-1/2) = \frac{-44}{25}$; $f'(3) = \frac{6}{100}\}$;

iv $f'(x) = ((2x-3)(8-1/2x))' = (2x-3)'(8-1/2x) + (2x-3)(8-1/2x)' = 2(8-1/2x) + (2x-3)(-1/2) = -2x + 17.5$. Tedy můžeme psát $f'(-1) = 19.5$; $f'(3) = 11.5$; $f'(10) = -2.5$;

v $f'(x) = (x^3-3)'(x+8) + (x^3-3)(x+8)' = 3x^2(x+8) + (x^3-3)1 = 4x^3 + 24x^2 - 3$. Tedy můžeme psát $f'(-1) = 17$; $f'(3) = 321$; $f'(0) = -3$;

vi $f'(x) = (2^x)' - (3x)' + (8)' = 2^x \ln(2) - 3$. Tedy můžeme psát $f'(-2) = \frac{\ln(2}{4} - 3$; $f'(3) = \sqrt{8}\ln(2) - 3$; $f'(1) 2\ln(2) - 3$;

vii $f'(x) = e^{x^8-3x+8} \cdot (x^8 - 3x + 8)' = e^{x^8-3x+8} \cdot (8x^7 - 3)$. Tedy můžeme psát $f'(0) = -3e^8$; $f'(1) = 5e^6$; $f'(-1) = -11e^{12}$;

viii $f(x) = e^{x^3} \cdot e^{-3x+8} = (e^{x^3})' \cdot e^{-3x+8} + e^{x^3} \cdot (e^{-3x+8})' = e^{x^3}(3x^2) \cdot e^{-3x+8} + e^{x^3} \cdot e^{-3x+8}(-3) = e^{x^3} \cdot e^{-3x+8}(3x^2 - 3)$. Tedy můžeme psát $f'(0) = e \cdot e^8(-3) = -3e^9$; $f'(1) = 0$; $f'(-1)0$;

ix $f'(x) = (\ln(x-33))' \cdot (x-33)' = \frac{1}{x-33} \cdot 1 = \frac{1}{x-33}$. Tedy můžeme psát $f'(33)$ - není definováno; $f'(34) = 1$;

x $f'(x) = \left(\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)' \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\ln(3)\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \left((x^2+1)^{1/2}\right)' = \frac{1}{\ln(3)\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}(x^2+1)' = \frac{1}{\ln(3)\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} 2x = \frac{x}{\ln(2)\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot (x^2+1)^{1/2}}$. Tedy můžeme psát $f'(3) = \frac{3}{\ln(2)\ln\left(\sqrt{10}\right)\sqrt{10}}$; $f'(0)$ - není definováno; $f'(-4) = \frac{-4}{\ln(2)\ln\left(\sqrt{17}\right)\sqrt{17}}$;

xi $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5^x+11}} \cdot (5^x + 11)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5^x+11}} \cdot 5^x \ln(5)$. Tedy můžeme psát $f'(1) = \frac{5\ln(5)}{2\sqrt{16}} = \frac{5\ln(5)}{8}$; $f'(0) = \frac{\ln(5)}{2\sqrt{11}}$; $f'(-2) = \frac{\ln(5)}{5^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{11+1/25}}$;

1 $f(x) = 13x^2 - x^5 + 4x - 536$ a tedy $f'(x) = 26x - 5x^4 + 4$;

2 $f(x) = \frac{3}{x^2} - x^{-4} + (x-3)(44x^2 + 11x)$ a tedy $f'(x) = \frac{-6}{x^3} + 4x^{-5} + 132x^2 - 242x^2 - 33$;

3 $f(x) = x^{-3/2} + \ln\left((3x + e^x)^3\right)$ a tedy $f'(x) = -3/2x^{-5/2} + 3\frac{3+e^x}{3x+e^x}$;

4 $f(x) = \frac{3x^2+2}{5x-1}$ a tedy $f'(x) = \frac{-6x+15x^2+10}{(5x-1)^2}$;

5 $f(x) = \ln(6x^2 - 5x + 1)$ a tedy $f'(x) = \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}$.