Funkce více proměnných

CVM

$f(x) \;\dots\; x \in D_f \subset \mathbb{R} \;\dots\;$ 1 proměnná „1D"

$f(x,y) \;\dots\; (x,y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2 \;\dots\;$ 2 proměnné „2D"

↳ 2 souřadnice

$f(x,y,z) \;\dots\; (x,y,z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3 \;\dots\;$ 3 proměnné „3D"

Parciální derivace

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y) = x^2 + 3x + y$

$\partial_x f = 2x + 3$ „na y koukám jako na konstantu"

$\partial_y f = 1$ „na x koukám jako na konstantu"

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2$

$\partial_x f = 8x$

$\partial_y f = 2y$

$\partial_z f = -2z$

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y) = e^{xy} - 19$

$\partial_x f = e^{xy} \cdot y$

$\partial_y f = e^{xy} \cdot x$

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y,z) = \ln(xy)$

$\partial_x f = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$

$\partial_y f = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}$

$\partial_z f = 0$

Stacionární bod

(x,y) je stac. bod, když
$$\partial_x f(x,y) = 0$$
$$\partial_y f(x,y) = 0$$

(x,y,z) je stac. bod, když
$$\partial_x f(x,y,z) = 0$$
$$\partial_y f(x,y,z) = 0$$
$$\partial_z f(x,y,z) = 0$$

$\boxed{P_2}$ najděte stacionární body $f(x,y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

$$\partial_x f(x,y) = 2x - 1 - y$$

$$\partial_y f(x,y) = -x - 3y^2 + 1$$

řešíme soustavu: $2x - 1 - y = 0 \quad (I)$

$-x - 3y^2 + 1 = 0 \quad (II)$

$(I) \Rightarrow y = 2x - 1$ dosadíme do (II)

$$\Rightarrow -x - 3(2x-1)^2 + 1 = 0$$

$$-x - 3[4x^2 - 4x + 1] + 1 = 0$$

$$-x - 12x^2 + 12x - 3 + 1 = 0$$

$$-12x^2 + 11x - 2 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot (-12)(-2) =$$

$$= 121 - 96 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{25}}{-24} = \begin{cases} \frac{-16}{-24} = +\frac{2}{3} = x_1 \\ \frac{-6}{-24} = +\frac{1}{4} = x_2 \end{cases}$$

$$y_1 = 2 \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3}$$

$$y_2 = 2 \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2}$$

Stacionární body jsou: $[x_1, y_1] = \left[+\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$[x_2, y_2] = \left[+\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]$

$\boxed{P_2}$ $f(x,y) = y^4 + 32x^2 - 32xy$

$\partial_x f(x,y) = 64x - 32y$

$\partial_y f(x,y) = 4y^3 - 32x$

$64x - 32y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}y$

$4y^3 - 32x = 0$

$\rightarrow 4y^3 - 32\left(\frac{1}{2}y\right) = 0$

$4y^3 - 16y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{4}$

$y^3 - 4y = 0$

$y(\underbrace{y^2 - 4}_{a^2-b^2}) = 0$

$y(y-2)(y+2) = 0$

$y_1 = 0 \qquad x_1 = 0$

$y_2 = 2 \qquad x_2 = 1$

$y_3 = -2 \qquad x_3 = -1$

Stacionární body jsou: $[0;0]$, $[1,2]$, $[-1,-2]$

$\boxed{P_2}$ $f(x,y) = e^{x^2} + (y+2)^2 + x^2$

$\partial_x f(x,y) = e^{x^2} \cdot 2x + 2x$

$\partial_y f(x,y) = 2(y+2)$

$[e^{x^2} + 1]\, 2x = 0 \iff x = 0$ Stac. bod: $[0; -2]$

$2(y+2) = 0 \iff y = -2$

$\boxed{P_2}$ $f(x,y,z) = xy - 2xz + 3yz + 7x - 15y + 3z$

$\partial_x f(x,y,z) = y - 2z + 7$

$\partial_y f(x,y,z) = x + 3z - 15$

$\partial_z f(x,y,z) = -2x + 3y + 3$

$y - 2z + 7 = 0 \rightarrow y = 2z - 7$

$x + 3z - 15 = 0 \rightarrow x = -3z + 15$

$-2x + 3y + 3 = 0$

$\rightarrow -2x + 6z - 21 + 3 = 0$

$\rightarrow +6z - 30 + 6z - 21 + 3 = 0$

$12z = 48$

$z = 4$

$x = -3 \cdot 4 + 15 = 3$

$y = 1$

Stacionární bod $[3; 1; 4]$

Hledání extrémů

$f(x),\ x \in M$ ← kompaktní množina (omezená, uzavřená)

↑ spojitá fce

$$M = \partial M \cup M^\circ$$

↑ hranice M ↑ vnitřek M

→ f nabývá svých extrémů

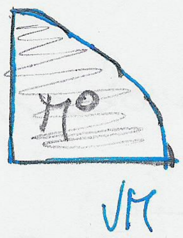


Schéma hledání extrémů

(A) najdeme kandidáty v M° – stacionární body

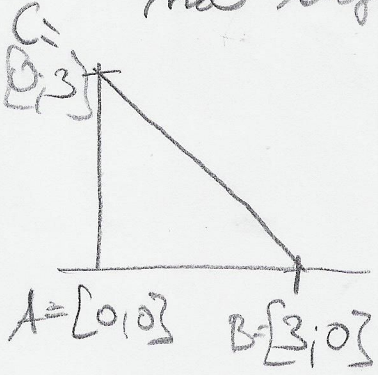
(B) najdeme kandidáty na ∂M

(C) porovnáme hodnoty kandidátů, najdeme min/max

1. Dosazovací metoda

$\boxed{\text{Př}}$ Najděte extrémy $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$

na trojúhelníku △ vrcholy $A=[0;0]$, $B=[3,0]$, $C=[0;3]$



(A) kandidáti uvnitř M (M°)

$\partial_x f(x,y) = 2x + 4y - 6$

$\partial_y f(x,y) = -4y + 4x$

$2x + 4y - 6 = 0$

$-4y + 4x = 0 \rightarrow y = x$

$\rightarrow \quad 2x + 4x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1 \qquad y = 1$

→ Stacionární bod: $[1;1]$

$f(1;1) = 1 - 2 + 4 - 6 - 1 = -4$

bod $[1;1]$ je kandidát na extrém

(B) 3 strany + 3 vrcholy

a) strana AB : väzba $y=0$ omezení $x \in [0;3]$

$y=0$ dosadíme do f

$h(x) = f(x,0) = x^2 - 6x - 1$ ... parabola

najdeme extrém ... vrchol

pomocí derivace $h'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$

$y = 0$

$f(3;0) = 9 - 6 \cdot 3 - 1 = -10$

bod $[3;0]$ je kandidát na extrém

b) strana AC : väzba $x=0$ omezení $y \in [0;3]$

$x=0$ dosadíme do f

$h(x) = f(0,y) = -2y^2 - 1$ ... parabola

najdeme extrém

$h'(y) = -4y$

$-4y = 0 \quad y = 0$

$x = 0$

$f(0;0) = -1$

bod $[0;0]$ je kandidát na extrém

c) strana CB rovnice = ?

přímka procházející body C, B $\quad y = ax + b$

dosaď C: $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

dosaď B: $0 = a \cdot 3 + b$

$$3a = -3$$
$$a = -1$$

$\Rightarrow$ rovnice $y = -x + 3, \; x \in [0;3]$

dosadíme do f

$$h(x) = f(x, -x+3) = x^2 - 2(-x+3)^2 + 4x(-x+3) - 6x - 1$$

$$= x^2 - 2[x^2 - 6x + 9] - 4x^2 + 12x - 6x - 1 =$$

$$= -5x^2 + 18x - 19$$

najdeme extrém h

$$h'(x) = -10x + 18, \quad -10x + 18 = 0$$

$$x = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{9}{5} + 3 = \frac{6}{5}$$

$$f\left(\frac{9}{5}; \frac{6}{5}\right) = -5\,\frac{81}{25} + 18\,\frac{9}{5} - 19 = -\frac{81}{5} + 2 \cdot \frac{81}{5} - \frac{95}{5} =$$

$$= \frac{81 - 95}{5} = \frac{-14}{5}$$

bod $\left[\frac{9}{5}; \frac{6}{5}\right]$ je kandidát na extrém

d) vrchol: každý vrchol je kandidát na extrém

[3;0], [0;0] jež máme

$c = [0;3]$ $f(0;3) = -2 \cdot 9 - 1 = -19$

Kandidáti:

$$\left.\begin{aligned} f(1;1) &= -4 \\ f(3;0) &= -10 \\ f(0;0) &= -1 \\ f\left(\tfrac{9}{5};\tfrac{6}{5}\right) &= \tfrac{-14}{5} \\ f(0;3) &= -19 \end{aligned}\right\}$$

minimum $f(0;3) = -19$

maximum $f(0;0) = -1$