PJ2 Vyšetřování průběhu funkce

Závěrečný test 2016/2017
VAR C

$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

0) f není sudá ani lichá $[f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)]$

1) D_f $\quad x^2 - 5x + 6 > 0$

$(x-3)(x-2)$

$D_f = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

2) limity v krajních bodech D_f

a) $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = \lim_{y \to +\infty} \log(y) = +\infty$

limita složené funkce

$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) =$

$=$

b) $\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = \lim_{y \to +\infty} \log(y) = +\infty$

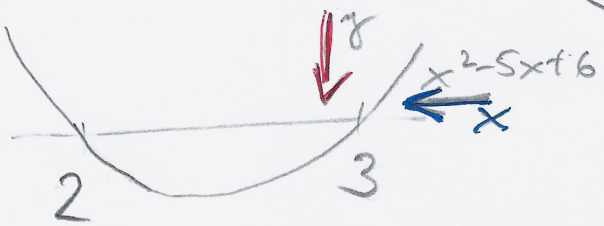
limita složené funkce

$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) =$

$= \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) =$

$= +\infty \cdot 1 = +\infty$

c) $\lim_{x \to 3^+} \log(x^2-5x+6) = \lim_{y \to 0_+} \log(y) = -\infty$

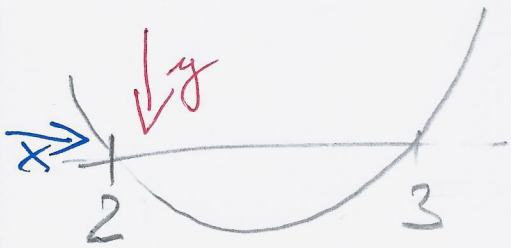


limita složené funkce

$\lim_{x \to 3^+} x^2-5x+6 = 0_{(+)}$

⇒ *hledaná svislá asymptota v $x=3$ (zprava)*

d) $\lim_{x \to 1} \log(x^2-5x+6) = \lim_{y \to 0_+} \log(y) = -\infty$



limita složené funkce

$\lim_{x \to 2^-} x^2-5x+6 = 0_{(+)}$

⇒ *hledaná svislá asymptota v $x=2$ (zleva)*

3) průsečíky s osami

$P_y = [0; \log(6)] \doteq [0; 1{,}79]$

P_x: $\log(x^2-5x+6) = 0 = \log 1$

$x^2-5x+6 = 1$

$x^2-5x+5 = 0$

$D = 25-4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\frac{5+\sqrt{5}}{2} \doteq 3{,}62$

$\frac{5-\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}38$

$P_{x_1} = [3{,}62; 0]$

$P_{x_2} = [1{,}38; 0]$

4) asymptoty

a) $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-5x+6)}{x} = 0 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = b$$

... asymptoty $x \to +\infty$ neexistují

b) $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2-5x+6)}{x} = 0 = a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 0x = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = b$$

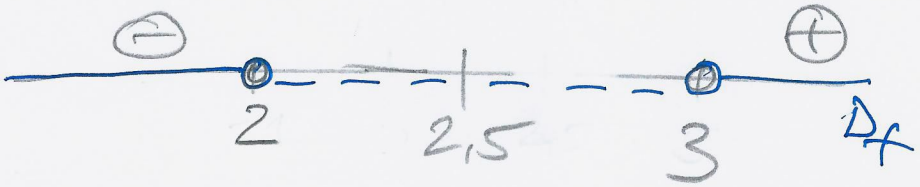
... asymptoty $x \to +\infty$ neexistují

---

5) $f'(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} \cdot (2x-5) = \frac{2(x-\frac{5}{2})}{(x-2)(x-3)}$

$D_{f'} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

6) monotonie



$(-\infty; 2)$	$(3; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
f klesá	f roste

$2 \notin D_f$

$3 \notin D_f$

7) lokální extrémy – f mění lokálně charakter

8) druhá derivace

$$f''(x) = \frac{2(x^2-5x+6) - (2x-5)(2x-5)}{(x-2)^2(x-3)^2} =$$

$D_{f''} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

$$= \frac{2x^2-10x+12 \quad -4x^2+10x-25}{(x-2)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-13}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

$-2x^2-13=0$

$D = 0 - 4(-2)(-13) < 0$

$-2x^2-13$

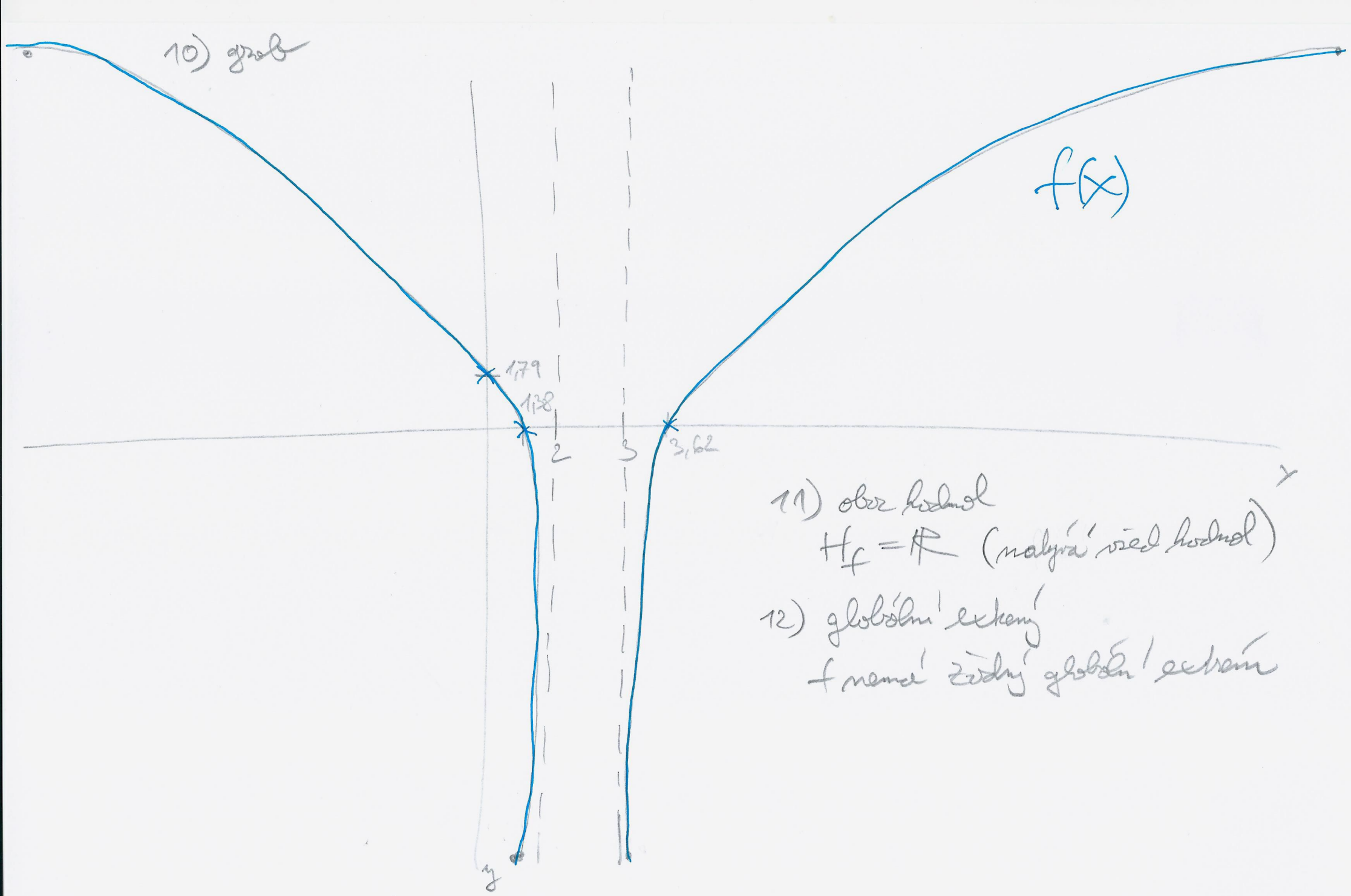
vždy < 0

9) konkávní/konvexní

$f''(x) < 0 \; , x \in D_f$

f konkávní na celém D_f

10) graf



11) obor hodnot

$H_f = \mathbb{R}$ (maximální obor hodnot)

12) globální extrémy

f nemá žádný globální extrém