8. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Opakování z přednášky

- **Parita funkce** tj. zda je funkce lichá nebo sudá určuje, jestli funkce má na svém definičním oboru nějakou “hezkou”symetrii.
- Funkce je ***sudá*** právě tehdy, když je ***osově symetrická podle osy*** y. To platí právě tehdy, když je definiční obor souměrný podle počátku (tedy $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$) a zároveň

  $$\text{pro libovolné } x \text{ platí } f(-x) = f(x).$$

- Funkce je ***lichá*** právě tehdy, když ***je středově symetrická podle počátku souřadnic [0,0]***. To platí právě tehdy, když je definiční obor souměrný podle počátku (tedy $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$) a zároveň

  $$\text{pro libovolné } x \text{ platí } f(-x) = -f(x).$$

- ***Monotonie funkce*** (tj. jestli je rostoucí nebo klesající) nám říká, jestli pro zvětšující se hodnoty x odpovídající hodnoty $f(x)$ rostou nebo klesají.
- Funkce je na nějakém intervalu (nebo v nějakém bodě) ***rostoucí*** právě tehdy, když na celém intervalu má ***kladnou derivaci*** (nebo v daném bodě má kladnou derivaci);
- Funkce je na nějakém intervalu (nebo v nějakém bodě) ***klesající*** právě tehdy, když na celém intervalu má ***zápornou derivaci*** (nebo v daném bodě má zápornou derivaci);
- ***Lokální extrémy*** funkce f jsou takové body, ve kterých je funkce f větší nebo menší než ve všech ostatních bodech z nějakého okolí.
- Funkce f má v bodě a ***minimum*** právě tehdy, když a není krajní bod D_f, f je nalevo od a klesající a zároveň je napravo od a rostoucí;
- Funkce f má v bodě a ***maximum*** právě tehdy, když a není krajní bod D_f, f je nalevo od a rostoucí a zároveň je napravo od a klesající;
- ***Stacionární body funkce*** f jsou “body podezřelé z lokálního extrému”. Jsou to všechny body a, ve kterých platí $f'(a) = 0$.
- ***Inflexní body funkce*** f jsou body, kde se mění konvexnost (resp. konkávnost) funkce. Jsou to ty body, ve kterých je nulová derivace (tj. jsou to stacionární body) a zároveň je zde nulová i druhá derivace.
- ***Konvexnost či konkávnost funkce*** určuje jak je daná funkce na nějakém intervalu (nebo v “nějakém bodě”) prohnutá.

- Funkce je na nějakém intervalu (nebo v nějakém bodě) ***konvexní*** ($\equiv$ *kopeček*) právě tehdy, když na celém intervalu má ***kladnou druhou derivaci*** (nebo v daném bodě má kladnou druhou derivaci);
- Funkce je na nějakém intervalu (nebo v nějakém bodě) ***konkávní*** ($\equiv$ *mistička*) právě tehdy, když na celém intervalu má ***zápornou druhou derivaci*** (nebo v daném bodě má zápornou druhou derivaci);
- ***Asymptota funkce*** je taková přímka, ke které se funkce přimyká, když se blíží k nějakému krajnímu bodu svého definičního oboru.
- Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ ***asymptotu bez směrnice*** právě tehdy, když a je krajní bod definičního oboru f a zároveň platí

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm\infty \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{x \to a_+} f(x) = \pm\infty.$$

  Asymptotou f ***v bodě*** a pak rozumíme přímku $x = a$ - tedy přímku rovnoběžnou s osou y a procházející bodem [a,0].

- Funkce f má v $\pm\infty$ ***asymptotu (se směrnicí)*** $p(x) = kx + q$ právě tehdy, když $\pm\infty$ je krajní bod definičního oboru f a zároveň platí

  i $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$;

  ii $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - kx = q$.

  Asymptotou f ***v bodě*** $\pm\infty$ pak rozumíme přímku $p(x) = kx + q$.

Průběh funkce U následujících funkcí vyšetřete jejich chování ($\equiv$ průběh funkce). Tedy

- Definiční obor;
- Limity v krajních bodech definičního oboru;
- Průsečíky s osami;
- Paritu funkce (je sudá, lichá nebo ani jedno);
- Intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající;
- Intervaly, kde je funkce konvexní nbo konkávní;
- Stacionární body funkce;
- Lokální extrémy funkce a inflexní body;
- Asymptoty funkce v krajních bodech definičního oboru.

Posléze načrtněte grafu funkce podle výše zjištěných vlastností. Kvůli časové náročnosti výroby příkadů na průběh funkce (tj. aby vám to pak pěkně vycházelo) tentokrát nemám vlastní příklady, snad ho stihnu někdy doplnit. O to víc je zapotřebí, abyste v případě nejistoty napsali a zeptali se nebo se jen ujistili. Příklad na počítání jsou tedy ze stránky přednášejícího - Úkol 12 a Úkol 13.